EJERCICIO 1

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

a) **(1.5 puntos)** Justifique cuáles de las siguientes operaciones pueden realizarse y, en tal caso, calcule el resultado:

$$A^2 \qquad A-B \qquad A\cdot B \qquad A\cdot B^t$$

b) **(1 punto)** Halle la matriz X tal que $A^t + B\cdot X = 3B$.

A.1.a) $A_{2\times 3}\cdot A_{2\times 3}$ → No puede hacerse puesto que las columnas de la primera (3) no son las mismas que las filas de la segunda (2)

$A_{2\times 3}-B_{3\times 2}$ → No puede hacerse puesto que no tienen la misma dimensión $2\times 3 \neq 3\times 2$

$A_{2\times 3}\cdot B_{3\times 2}$ → Sí puede hacerse $M_1 = A\,B$

$$\rightarrow \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

$A_{2\times 3}\cdot B^t_{2\times 3}$ → No puede hacerse, por lo mismo que A^2

A.1.b) $B\cdot X = 3B - A^t$; $X = B^{-1}\cdot(3B - A^t)$. Sin embargo, la matriz B no tiene inversa puesto que no es cuadrada. Hay que hacer el ejercicio con sistemas de ecuaciones:

$$B\cdot X = 3B - A^t \quad ; \quad B\cdot X = C$$

$C = 3\ B - \text{Traspone}(A)$

$$\rightarrow \begin{pmatrix}-1 & 3\\ 3 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X} := \begin{pmatrix}\mathbf{a} & \mathbf{b}\\ \mathbf{c} & \mathbf{d}\end{pmatrix}$$

$B\cdot X$

$$\rightarrow \begin{pmatrix}\mathbf{c} & \mathbf{d}\\ \mathbf{a} & \mathbf{b}\\ \mathbf{a+c} & \mathbf{b+d}\end{pmatrix}$$

Por tanto, c = -1 ; d = 3 ; a = 3 ; b = −1 → $X=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$

EJERCICIO 2

Sea la función $f(x)=x^3+ax^2+bx$.

a) **(1 punto)** Halle a y b sabiendo que la función tiene un mínimo en el punto de abscisa $x=-1$ y un punto de inflexión en el punto de abscisa $x=-2$.

b) **(1.5 puntos)** Para a = 6 y b = 9, halle los puntos de corte con los ejes, estudie la monotonía y extremos y esboce la gráfica de la función.

A.2.a) $f'(x)=3x^2+2ax+b$; $f''(x)=6x+2a$

Punto de inflexión en $x=-2$: $f''(-2)=0 \rightarrow -12+2a=0 \rightarrow a=6$

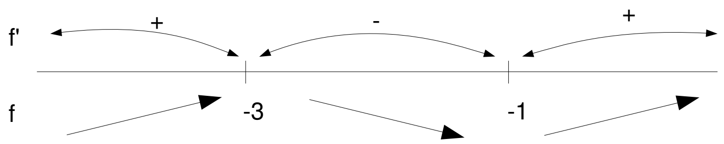
Mínimo en $x=-1$: $f'(-1)=0 \rightarrow 3-12+b=0 \rightarrow b=9$

A.2.b) $f(x)=x^3+6x^2+9x$

Corte en el eje Y: $x=0$; $y=0$ $\rightarrow(0,0)$

Cortes en el eje X: $y=0$; $x=?$. Sacamos factor común:
$x(x^2+6x+9)=0 \rightarrow x=0$; $x=-3$. Puntos: $(0,0)$, $(-3,0)$

Monotonía: igualamos a 0 la derivada y resolvemos:
$3x^2+12x+9=0 \rightarrow x=-3$, $x=-1$

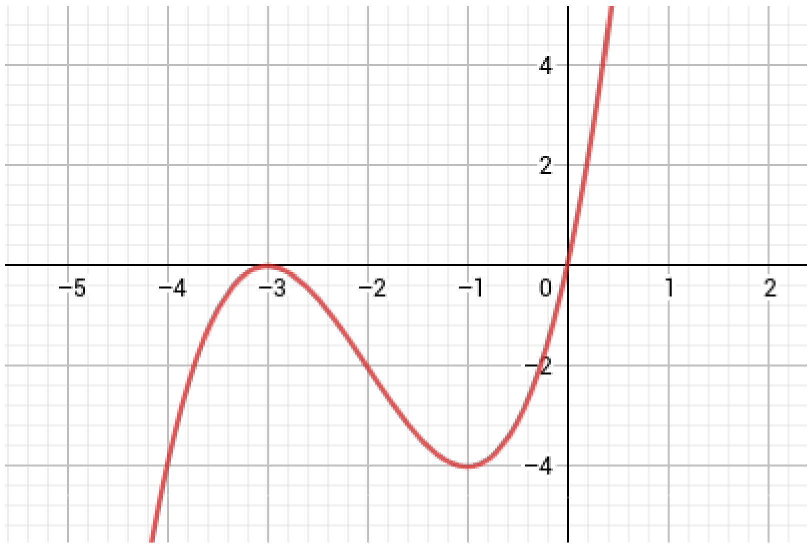


Creciente en (−∞ , -3) y en (-1 , +∞)

Decreciente en (−3 , −1)

Máximo relativo en x = -3

Mïnimo relativo en x = -1



EJERCICIO 3

Supongamos que el 20% de los votantes de Trump apoya la construcción del muro en la frontera con México y que solo el 5 % de los que no lo votaron la apoya. En un grupo formado por 5000 votantes de Trump y 10000 estadounidenses que no lo votaron se elige una persona al azar.

a) **(1 punto)** ¿Cuál es la probabilidad de que ésta apoye la construcción del muro?

b) **(0.75 puntos)** Si la persona elegida apoya la construcción del muro, ¿cuál es la probabilidad de que no haya votado a Trump?

c) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que sea votante de Trump o apoye la construcción del muro.

A.3.)

	Tr	Tr'	
Mu	1000	500	1500
Mu'	4000	9500	13500
	5000	10000	15000

20% de 5000 = 1000

5% de 10000 = 500

a) $p(Mu)=\dfrac{1500}{15000}=0{,}1$

b) $p(Tr'/Mu)=\dfrac{500}{1500}=0{,}33$

c) $p(Tr\cup Mu)=1-\dfrac{9500}{15000}=0{,}37$

EJERCICIO 4

El tiempo de vida de una determinada especie de tortuga es una variable aleatoria que sigue una ley Normal de desviación típica 10 años. Se toma una muestra aleatoria simple de 10 tortugas y se obtienen los siguientes valores:

46 38 59 29 34 32 38 21 44 34

a) **(1.5 puntos)** Determine un intervalo de confianza, al 95 %, para la vida media de dicha especie de tortugas.

b) **(1 punto)** Calcule el tamaño mínimo que debe tener una muestra para que el error de estimación de la vida media no sea superior a 5 años, con un nivel de confianza del 98 %.

A.4.a) $\bar{X}=\dfrac{46+38+...+34}{10}=37{,}50\ \text{años}$

$p(z\le z_{\alpha/2})=\dfrac{1+0{,}95}{2}\quad ;\quad z_{\alpha/2}=1{,}96$

Intervalo de confianza para la media: $\left(\bar{x}-z_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x}+z_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=(31{,}30\ ;\ 43{,}70)$

A.4.b) $p(z\le z_{\alpha/2})=\dfrac{1+0{,}98}{2}\quad ;\quad z_{\alpha/2}=2{,}33$

$E=z_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\quad ;\quad n=\left(z_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{E}\right)^2=21{,}65\quad ;$ La muestra debe ser de al menos 22 tortugas

EJERCICIO 1

a) **(0.8 puntos)** Represente el recinto definido por las siguientes inecuaciones:

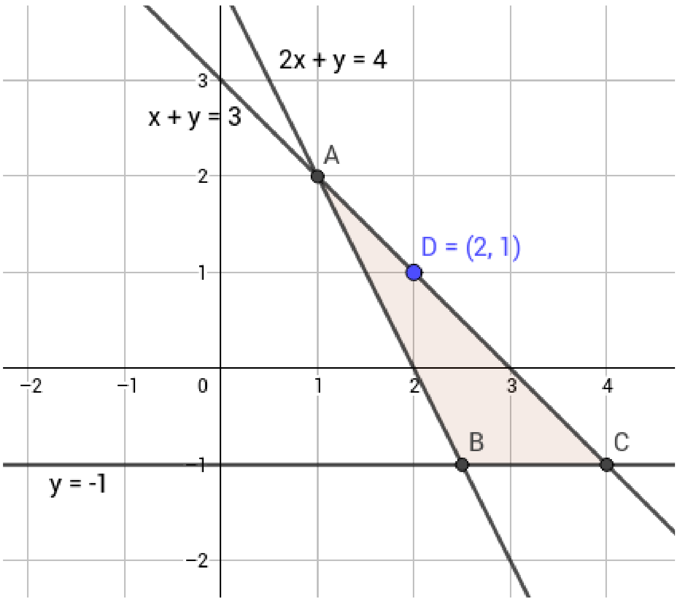
$$x+y\le 3 \qquad 2x+y\ge 4 \qquad y\ge -1$$

b) **(0.25 puntos)** Razone si el punto (2, 1) pertenece al recinto anterior.

c) **(1.2 puntos)** Obtenga los vértices del recinto y los valores mínimo y máximo de la función $F(x,y)=5x+4y$ en ese recinto, indicando en qué puntos se alcanzan.

d) **(0.25 puntos)** Razone si la función F puede alcanzar el valor 9 en el recinto anterior.

B.1.a)



B.1.b) El punto D "parece que está en el recinto". Hay que sustituirlo en las tres inecuaciones:

$2+1\le 3 \rightarrow$ *Sí*
$2\cdot 2+1\ge 4 \rightarrow$ *Sí*
$1\ge -1 \rightarrow$ *Sí*

Sí que está en el recinto.

B.1.c) Se resuelven los sistemas de ecuaciones y se obtienen los vértices: A(1 , 2) , B(2,5 ; –1) , C(4 , –1)

F(A) = 13

F(B) = 8,5 : Mínimo

F(C) = 16 : Máximo

B.1.d) Como el mínimo es 8,5 y el máximo 16, F alcanza cualquier valor comprendido entre esos dos valores, en concreto debe haber puntos en los que valga 9.

EJERCICIO 2

Se consideran las siguientes funciones $f(x)=\dfrac{5x-16}{x}$ y $g(x)=x^2$.

a) **(1 punto)** Determine la abscisa del punto donde se verifique que $f'(x)=g'(x)$.

b) **(1.5 puntos)** Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de cada función en el punto de abscisa $x=2$ y determine el punto de corte de ambas rectas tangentes, si existe.

B.2.a) $f'(x)=\dfrac{5\cdot x-5x+16}{x^2}=\dfrac{16}{x^2}$; $g(x)=2x$

Igualamos: $\dfrac{16}{x^2}=2x$; $16=2x^3$; $x^3=8$; $x=2$

B.2.b) t_1: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

$f'(2)=4$; $f(2)=-3$

t_1: $y=4(x-2)-3$; $y=4x-11$

t_2: $y=g'(x_0)(x-x_0)+g(x_0)$

$g'(2)=4$; $g(2)=4$

t_2: $y=4(x-2)+4$; $y=4x-4$

Buscamos el punto de corte: $4x-11=4x-4$; $0=7$; Sin solución

No hay punto de corte entre las rectas. Son paralelas.

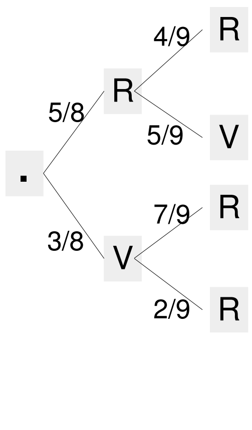
EJERCICIO 3

Una urna contiene 5 bolas rojas y 3 verdes. Se extrae una bola y se reemplaza por 2 bolas del otro color. A continuación se extrae una segunda bola.

a) **(1.25 puntos)** Calcule la probabilidad de que la segunda bola extraída sea verde.

b) **(1.25 puntos)** Halle la probabilidad de que la primera haya sido roja, sabiendo que la segunda también ha sido roja.

B.3)



a) $p(V2)=\dfrac{5}{8}\cdot\dfrac{5}{9}+\dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{2}{9}=\dfrac{31}{72}$

b) $p(R1/R2)=\dfrac{p(R1\cap R2)}{p(R2)}=\dfrac{\dfrac{5}{8}\cdot\dfrac{4}{9}}{1-\dfrac{31}{72}}=\dfrac{20}{41}$

EJERCICIO 4

En una muestra, elegida al azar, de 100 estudiantes de una Universidad, se ha observado que 25 desayunan en la cafetería del campus.

a) **(1.25 puntos)** Determine, con un nivel de confianza del 95 %, un intervalo de confianza para estimar la proporción de estudiantes de esa Universidad que desayunan en la cafetería.

b) **(1.25 puntos)** Si la proporción de estudiantes de esa Universidad que desayunan en la cafetería del campus en una muestra aleatoria es de 0.2, y el error cometido en la estimación ha sido inferior a 0.03, con un nivel de confianza del 92.5 % calcule el tamaño mínimo de la muestra.

B.4.a)

$$P[Z\leq z_{\alpha/2}]=\frac{1+p}{2}=\frac{1+0{,}95}{2}=0{,}975 \rightarrow z_{\alpha/2}=1{,}96 \quad ; \quad \overline{p}=\frac{25}{100}=0{,}25$$

Intervalo de confianza para la proporción: $\left(\overline{p}-z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}\ ,\overline{p}+z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}\right)=(0{,}17\ ;\ 0{,}33)$

B.4.b) $P[Z\leq z_{\alpha/2}]=\frac{1+p}{2}=\frac{1+0{,}925}{2}=0{,}9625 \rightarrow z_{\alpha/2}=1{,}78 \quad ; \quad \overline{p}=0{,}2$

$$E=z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}$$

$n=\left(\frac{z_{\alpha/2}}{E}\right)^2\cdot\overline{p}(1-\overline{p})=563{,}57\ ;$ La muestra debe ser de al menos 564 estudiantes