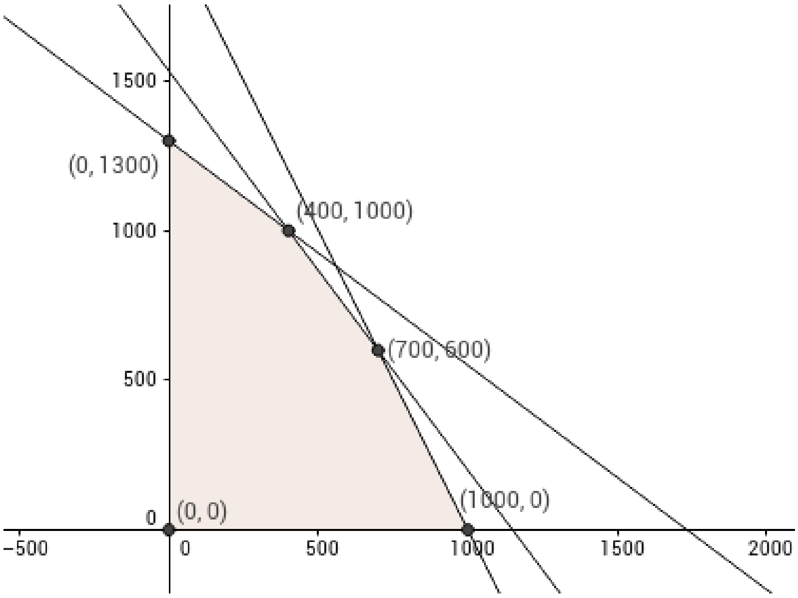
(2.5 puntos) Un fabricante de complementos alimenticios elabora dos tipos de bebidas energéticas a partir de tres componentes: taurina, cafeína y L-carnitina. Un envase del primer tipo de bebida precisa 30 g de taurina, 40 g de cafeína y 20 g de L-carnitina, mientras que uno del segundo necesita 40 g de taurina, 30 g de cafeína y 10 g de L-carnitina. Sabiendo que dispone de 52 kg de taurina, 46 kg de cafeína y 20 kg de L-carnitina, que cada envase del primer tipo se vende por 1.5 € y cada envase del segundo tipo por 1 €, ¿cuántos envases de cada tipo de bebida tendría que elaborar para obtener la ganancia máxima? ¿A cuánto ascendería esta ganancia?

A.1) taurina: $30x+40y\le 52000$
cafeína: $40x+30y\le 46000$
L-carnitina: $20x+10y\le 20000$
$x\ge 0$; $y\ge 0$
Beneficio: $B(x,y)=1{,}5x+y$



B(0 , 1300) = 1300

B(400 , 1000) = 1600

B(700 , 600) = 1650

B(1000 , 0) = 1500

Debe elaborar 700 envases del primer tipo y 600 del segundo. La ganancia sería de 1650 €.

Una empresa quiere invertir en productos financieros un mínimo de un millón de euros y un máximo de seis millones de euros. La rentabilidad que obtiene viene dada en función de la cantidad invertida, x, por la siguiente expresión:

$$R(x)=\begin{cases} x-2 & si \quad 1\le x<2 \\ -x^2+10x-16 & si \quad 2\le x\le 6 \end{cases}$$

donde tanto x, como $R(x)$, están expresadas en millones de euros.
a) **(0.75 puntos)** Estudie la continuidad de la función R.
b) **(0.75 puntos)** Esboce la gráfica de la función.
c) **(1 punto)** ¿Qué cantidad debe invertir para obtener la máxima rentabilidad y a cuánto asciende ésta? ¿Para qué valores de x la rentabilidad es positiva?

A.2.a) Los dos trozos son polinomios, por tanto, continuos. Hay que estudiar el punto de división:

x = 2: $R(2)=\lim_{x\to 2^+} R(x)=0$ La función es continua en *x = 2*. Es continua en su dominio: *(1, 6)*

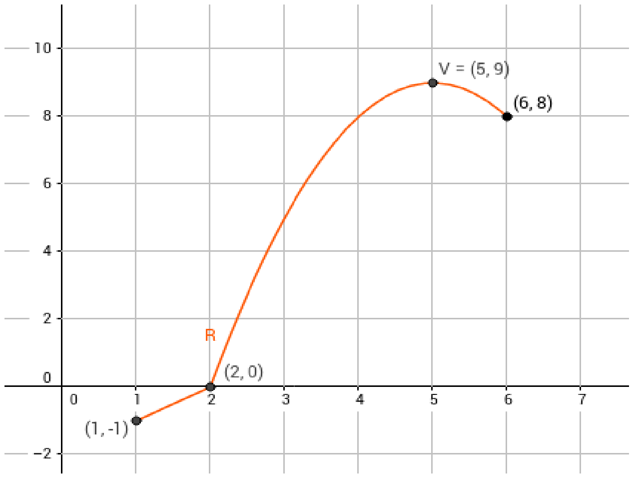
$\lim_{x\to 2^-} R(x)=0$

A.2.b) El primer trozo es una recta. Calculamos dos puntos: *(1 , –1)* y *(2 , 0)*

El segundo trozo es una parábola. Calculamos el vértice: $x=\frac{-b}{2a}=5 \quad , \quad y=9$

y los dos extremos: *(2 , 0)* y *(6 , 8)* .

Con esto podemos esbozar la gráfica:



A.2.c) El máximo es el vértice: debe invertir 5 millones de euros y obtendrá una rentabilidad de 9 millones.

La rentabilidad es positiva para valores comprendidos entre 2 millones y 6 millones.

En un estudio sobre los niveles de audiencia de dos cadenas de radio, se obtuvo que el 50 % de la población escucha la cadena A, el 40 % escucha la cadena B y el 20 % oye ambas.
a) **(1 punto)** Halle el porcentaje de la población que escucha alguna de las dos cadenas.
b) **(0.5 puntos)** Calcule el porcentaje de la población que escucha solo la cadena B.
c) **(1 punto)** Halle el porcentaje de la población que escucha solo una de las dos cadenas.

%	A	A’	
B	20	20	40
B’	30	30	60
	50	50	100

A.3.a) $p(A\cup B)=20+20+30=70\%$

A.3.b) $p(B\cap A')=20\%$

A.3.c) $p(A\cap B')+p(B\cap A')=30+20=50\%$

En un centro docente hay 160 alumnos matriculados en 1º de ESO, 120 en 2º, 120 en 3º, 80 en 4º, 240 en 1º de Bachillerato y 200 en 2º. Se quiere constituir una comisión en la que todos los cursos estén representados de forma proporcional.
a) **(1.25 puntos)** ¿Cuántos alumnos debe haber en la comisión y cuántos de cada curso si dicha comisión está formada por el 5 % del total del alumnado?
b) **(1.25 puntos)** ¿Cuál sería la composición de la comisión si queremos que haya 9 alumnos de 2º de ESO?

A.4.a) Total de alumnado: 160 + 120 + 120 + 80 + 240 + 200 = 920 alumnos

5% de 920 = 46 alumnos debe haber en la comisión.

Reparto proporcional: $\frac{n_1}{160}=\frac{46}{920}$; $n_1=\frac{46}{920}\cdot 160=8$ alumnos de 1º

$n_2=\frac{46}{920}\cdot 120=6$ $\quad n_4=\frac{46}{920}\cdot 80=4$ $\quad n_6=\frac{46}{920}\cdot 200=10$

$n_3=\frac{46}{920}\cdot 120=6$ $\quad n_5=\frac{46}{920}\cdot 240=12$

A.4.b) $\frac{9}{120}=\frac{n}{920}$; $n=\frac{920}{120}\cdot 9=69$. Se debe coger 69 alumnos en total.

$\frac{n_1}{160}=\frac{69}{920}$; $n_1=\frac{69}{920}\cdot 160=12$ de primero. $n_3=\frac{46}{920}\cdot 120=9$ $\quad n_5=\frac{69}{920}\cdot 240=18$

$n_4=\frac{46}{920}\cdot 80=6$ $\quad n_6=\frac{69}{920}\cdot 200=15$

Sea el recinto definido por las siguientes inecuaciones:

$$y \le 2x+1 \qquad y \le 13-4x \qquad x \ge 4-y$$

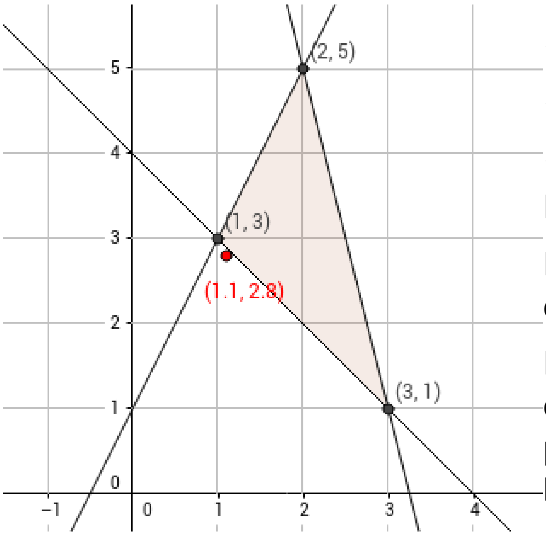
a) **(0.5 puntos)** Razone si el punto de coordenadas $(1.1\ ,\ 2.8)$ pertenece al recinto.
b) **(1.5 puntos)** ¿En qué puntos alcanza la función $F(x,y)=-3x+1.5y$ sus valores extremos y cuáles son éstos?
c) **(0.5 puntos)** Razone si existe algún punto del recinto en el que la función F se anule.

B.1.a) Comprobamos si cumple las restricciones:

$2{,}8 \le 2\cdot 1{,}1+1$ Verdadero ; $2{,}8 \le 13+4\cdot 1{,}1$ Verdadero ; $1{,}1 \ge 4-2{,}8$ Falso

El punto está fuera del recinto.

B.1.b) Dibujamos la región y estudiamos los vértices en la función *F*:



F(2 , 5) = 1,5

F(1 , 3) = 1,5

F(3 , 1) = -7,5

El mínimo se alcanza en el punto *(3 , 1)* y vale *–7,5*.

El máximo se alcanza en cualquier punto comprendido entre *(2 , 5)* y *(1 , 3)* y vale *1,5*

B.1.c) La función alcanza cualquier valor comprendido entre el máximo y el mínimo. Como el máximo es positivo y el mínimo negativo, en la región debe haber puntos en los que *F* valga *0*

Se considera la función $f(x)=\begin{cases} ax-3x^2 & si \quad x\le 1 \\ 2x^2+b & si \quad x>1 \end{cases}$

a) **(1.5 puntos)** Calcule los valores de a y b para que la función f sea derivable en $x=1$.
b) **(1 punto)** Para $a=3$ y $b=-2$, estudie la monotonía y curvatura de la función f.

B.2.a) Debe ser continua y derivable: $f'(x)=\begin{cases} a-6x & , \quad si \quad x<1 \\ 4x & , \quad si \quad x>1 \end{cases}$

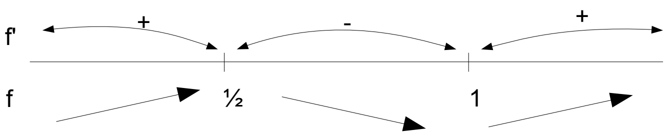
$$f(1)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=a-3 \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x)=2+b \quad ; \quad f'(1^-)=a-6 \qquad f'(1^+)=4$$

. Por tanto, debe ser *a = 10* , *b = 5*

B.2.b) Con estos valores de *a* y *b* la función es continua en *x* = 1, aunque no derivable

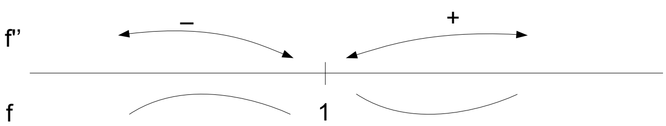
Monotonía:

$$f(x)=\begin{cases} 3x-3x^2 & , \quad si \quad x\le 1 \\ 2x^2-2 & , \quad si \quad x>1 \end{cases} \; ; \quad f'(x)=\begin{cases} 3-6x & , \quad si \quad x<1 \\ 4x & , \quad si \quad x>1 \end{cases} \; ; \quad f'(x)=0 \; ; \; \begin{cases} \frac{1}{2} & , \quad si \quad x<1 \\ \nexists & , \quad si \quad x>1 \end{cases}$$



Creciente en *(–∞ , ½)* y en *(1 , + ∞)*. Decreciente en *(½ , 1)*. Máximo en *x = ½* . Mínimo en *x = 1*

Curvatura: $f''(x)=\begin{cases} -6 & , \quad si \quad x<1 \\ 4 & , \quad si \quad x>1 \end{cases}$



Cóncava en *(–∞ ,1)* , convexa en *(1 , + ∞)*.
Punto de inflexión en *x = 1*

A una asamblea en la Universidad asisten 420 alumnos de los cuales 180 son de Empresariales, 72 de Relaciones Laborales y el resto de Derecho. Un tercio de los alumnos de Empresariales, dos tercios de los de Derecho y 16 alumnos de Relaciones Laborales votan NO a la huelga. El resto ha votado SÍ.
a) **(0.9 puntos)** Calcule la probabilidad de que elegido un alumno al azar, sea de Empresariales y haya votado SÍ a la huelga.
b) **(0.8 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que elegido un alumno al azar haya votado SÍ a la huelga?
c) **(0.8 puntos)** Si elegido un alumno al azar, resulta que ha votado NO a la huelga, ¿cuál es la probabilidad de que sea de Relaciones Laborales?

B.3)

	E	R	D	
H'	60	16	112	188
H	120	56	56	232
	180	72	168	420

a) $p(E \cap H) = \frac{120}{420} = \frac{2}{7}$

b) $p(H) = \frac{232}{420} = \frac{58}{105}$

c) $p(R/H') = \frac{16}{188} = \frac{4}{47}$

El tiempo diario, en horas, que dedican los alumnos de una Facultad a las redes sociales sigue una ley Normal de desviación típica 2 horas. Se toma una muestra aleatoria de 10 alumnos con los siguientes tiempos en horas

6.5 7 6.25 7 5.5 7.25 6.75 6.25 6 6.5

a) **(1.5 puntos)** Determine el intervalo de confianza, al 90 %, para el tiempo medio diario dedicado por los alumnos de esa Facultad a las redes sociales.
b) **(1 punto)** Utilizando el mismo nivel de confianza anterior, calcule el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el tiempo medio diario, para un error de estimación máximo de 0.1 horas.

B.4.a) $\bar{X} = \frac{6{,}5+7+6{,}25+...}{10} = 6{,}5$; $p(z \le z_{\alpha/2}) = \frac{1+0{,}90}{2}$; $z_{\alpha/2} = 1{,}645$

Intervalo de confianza para la media: $\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} , \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (5{,}46 ; 7{,}54)$

B.4.b) $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$; $n = \left(z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = 1082{,}22$; La muestra debe ser de al menos 1083 alumnos