SOLUCIONES
Prueba de Acceso a la Universidad. Universidades de Andalucía
Examen Reserva A. Año 2017

Matemáticas aplicadas a las CCSS II

Paco Muñoz. IES Virgen de la Cabeza – Marmolejo (Jaén)

EJERCICIO 1

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) **(1 punto)** Calcule $A^2 + B^3$.

b) **(1.5 puntos)** Calcule X en la ecuación matricial $(A+B)\cdot X = A - B$.

A.1.a) $A \cdot A \rightarrow \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ $\quad B \cdot B \rightarrow \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad (B \cdot B) \cdot B \rightarrow \begin{pmatrix} -27 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A^2 + B^3 \rightarrow \begin{pmatrix} -19 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$

A.1.b) $X=(A+B)^{-1}\cdot(A-B)$

inversa $(A+B) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ $\quad$ inversa $(A+B)\cdot(A-B) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

EJERCICIO 2

El beneficio en euros que obtiene una empresa al vender x unidades de un artículo viene dado por la función $B(x) = -x^2 + 360x - 18000,\quad 50 \le x \le 350$.

a) **(0.8 puntos)** ¿Cuál es el beneficio obtenido si vende 100 unidades? ¿Cuántas unidades debe vender para obtener un beneficio de 13500 €?

b) **(1 punto)** ¿Cuál es el número de unidades que debe vender para que el beneficio sea máximo? ¿A cuánto asciende ese beneficio?

c) **(0.7 puntos)** Represente gráficamente la función y determine cuántas unidades hay que vender para no obtener pérdidas.

A.2.a) $B(100)=8000$

$B(x)=13500\ ;\ -x^2+360x-18000=13500\ ;\ x=150;210$. Debe vender, o bien 150 unidades, o bien 210

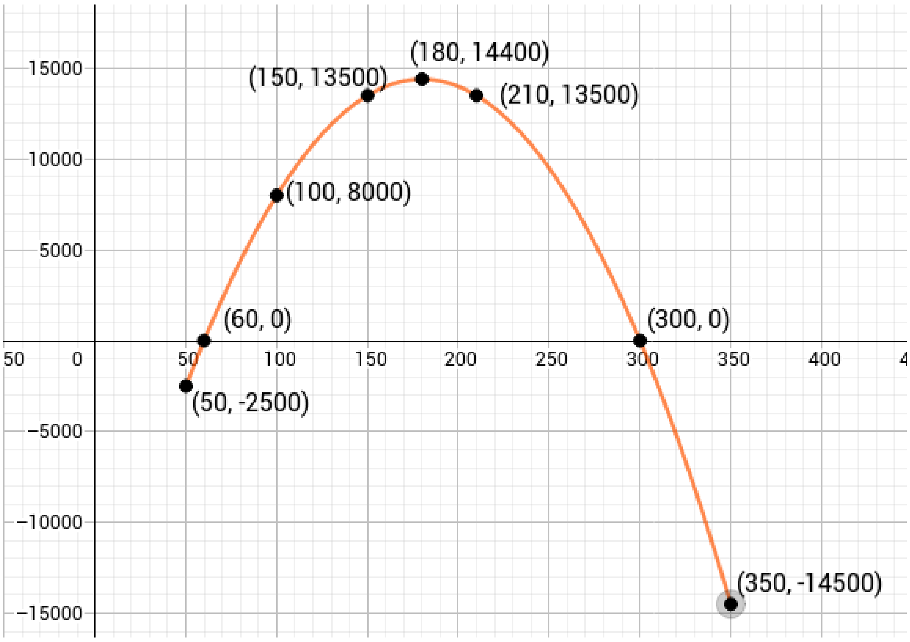
A.2.b) La función es una parábola con las ramas hacia abajo. El vértice es el máximo:

Vértice: $x=\frac{-b}{2a}=180\ ;\ B(180)=14400$. El beneficio es máximo vendiendo 180 unidades. Es de 14400 €.

A.2.c) Calculamos los puntos de corte con el eje X y los valores en *x = 50* y *x = 350*

$B(x)=0\ ;\ -x^2+360x-18000=00\ ;\ x=60;300\ ;\ B(50)=-2100\ ;\ B(350)=-14500$

Para no tener pérdidas debe vender un mínimo de 50 y un máximo de 350 unidades



<u>EJERCICIO 3</u>

Sean A, B y C tres sucesos de los que se sabe que A y B son independientes, A y C son incompatibles, $P(A)=0.4$, $P(A\cap B)=0.1$ y $P(C)=0.2$.

Calcule las probabilidades de los siguientes sucesos:

a) **(1.25 puntos)** Que suceda A si no sucede B.

b) **(0.75 puntos)** Que no suceda ni A ni C.

c) **(0.5 puntos)** Que si no sucede B tampoco suceda A.

B.3.a) A y B independientes: $p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B)$ → $p(B)=p\dfrac{(A\cap B)}{p(A)}=\dfrac{0,1}{0,4}=0,25$

$$p(A/B')=\frac{p(A\cap B')}{p(B')}=\frac{p(A)-p(A\cap B)}{p(B')}=\frac{0,4-0,1}{0,75}=0,4$$

B.3.b) A y C incompatibles: $p(A\cap C)=0$

$$p(A'\cap C')=p((A\cup C)')=1-p(A\cup C)=1-[p(A)+p(C)-p(A\cap C)]=1-0,4-0,2+0=0,4$$

B.3.c) $p(A'/B')=\dfrac{p(A'\cap B')}{p(B')}=\dfrac{1-p(A\cup B)}{p(B')}=\dfrac{1-0,4-0,25+0,1}{0,75}=0,6$

EJERCICIO 4
Se desea estimar el porcentaje de alumnos de un determinado instituto que lleva gafas. Para ello se eligen 300 alumnos, de los que 210 llevan gafas.
a) **(1.5 puntos)** Calcule el intervalo de confianza para la proporción de alumnos que lleva gafas, con un nivel de confianza del 97 %.
b) **(1 punto)** Si por estudios en otros institutos se sabe que la proporción de alumnos que lleva gafas es del 70 %, determine el tamaño mínimo de la muestra necesario para que, con una confianza del 97 %, el error máximo que se cometa sea inferior a 0.06.

A.4.a)

$$P[Z \le z_{\alpha/2}] = \frac{1+p}{2} = \frac{1+0,97}{2} = 0,985 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2,17 \quad ; \quad \overline{p} = \frac{210}{300} = 0,70$$

Intervalo de confianza para la proporción: $\left(\overline{p} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}, \overline{p} + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}\right) = (0,6426 ; 0,7574)$

A.4.b)

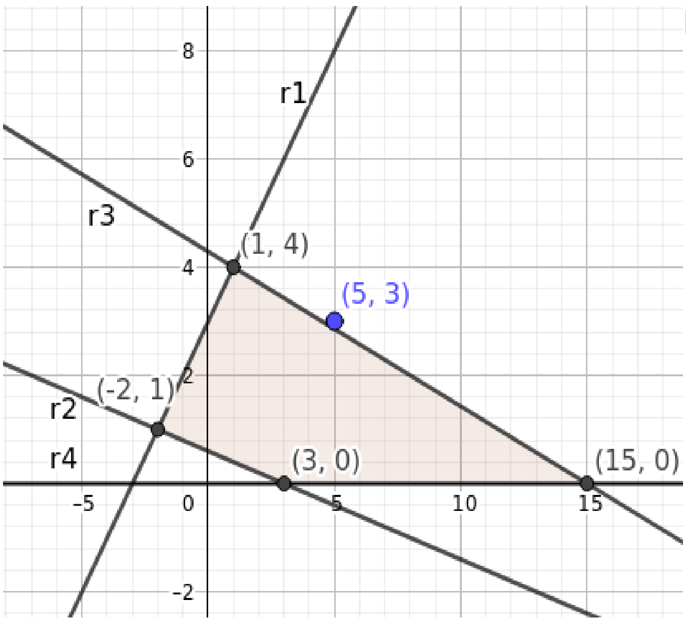
$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}} \quad ; \quad n = \left(\frac{z_{\alpha/2}}{E}\right)^2 \cdot \overline{p}(1-\overline{p}) = 274,71 ;$ La muestra debe ser de al menos 275 alumnos

EJERCICIO 1
a) **(1.2 puntos)** Represente el recinto dado por las siguientes inecuaciones:

$$y \le x+3 \qquad x+5y \ge 3 \qquad 2x+7y \le 30 \qquad y \ge 0$$

b) **(0.5 puntos)** Razone si el punto (5, 3) pertenece al recinto anterior.
c) **(0.8 puntos)** Obtenga los valores mínimo y máximo de la función $F(x, y) = x - y$ en ese recinto, indicando en qué puntos se alcanzan.

B.1.a)



B.1.b) Parece que no cumpe la tercera inecuación. Lo comprobamos:

$2 \cdot 5 + 7 \cdot 3 = 31 > 30$. Está fuera

B.1.c)
$F(x, y) = x - y$
$F(-2,1) = -3$
$F(1,4) = -3$
$F(15,0) = 15$
$F(3,0) = 3$

El máximo es 15, en el (15 , 0)

El mínimo es -3, en cualquier punto del segmento que une (- 2 , 1) con (1 , 4)

EJERCICIO 2

Se considera la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{a}{x-1} & si \quad x<0 \\ x^2-bx-1 & si \quad x\geq 0 \end{cases}$

a) **(1.5 puntos)** Calcule el valor de a y b, para que la función sea derivable en $x=0$.
b) **(1 punto)** Para a = 1 y b = 2, halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=2$.

B.2.a) El único punto a estudiar es *x = 0* , puesto que *x = 1* no está en el dominio del primer trozo

$f(0)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=-1$

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=-a$. Para que sea continua, debe ser *a = 1*

$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{-a}{(x-1)^2} \ , & si \quad x<0 \\ 2x-b \ , & si \quad x>0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{matrix} f'(0^-)=-a \\ f'(0^+)=-b \end{matrix}$. Para que sea derivable debe ser *a = b = 1*

B.2.b) $t: \quad y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

$f'(2)=2 \quad ; \quad f(2)=-1$

$t: \quad y=2(x-2)-1 \quad ; \quad y=2x-5$

EJERCICIO 3

Para superar una asignatura un estudiante hace un examen teórico y otro práctico. La probabilidad de que apruebe el examen teórico es 0.8, la de que apruebe el examen práctico es 0.6 y la de que apruebe ambos es 0.5.
a) **(1 punto)** ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe al menos uno de los dos exámenes?
b) **(1 punto)** ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe el examen práctico en caso de no haber aprobado el examen teórico?
c) **(0.5 puntos)** ¿Son independientes los sucesos “aprobar el examen teórico” y “aprobar el examen práctico”?

B.3.a) $p(T)=0{,}8 \ ; \ p(P)=0{,}6 \ ; \ p(T\cap P)=0{,}5$

$p(T\cup P)=0{,}8+0{,}6-0{,}5=0{,}9$

B.3.b) $p(P/T')=\dfrac{p(P\cap T')}{p(T')}=\dfrac{p(P)-p(P\cap T)}{p(T')}=\dfrac{0{,}6-0{,}5}{0{,}2}=0{,}5$

B.3.c) $p(T)\cdot p(P)=0{,}48\neq p(T\cap P)$. Son dependientes

EJERCICIO 4

Se sabe que el peso de los tarros de mermelada que fabrica una empresa sigue una distribución Normal con desviación típica 25 g. Con objeto de estimar el peso medio de los tarros fabricados por esa empresa se selecciona una muestra aleatoria de 100 tarros de esa fábrica obteniéndose un peso medio de 230 g.

a) **(1.3 puntos)** Calcule un intervalo de confianza, al 96 %, para la media de la población.

b) **(0.2 puntos)** ¿Qué error máximo se ha cometido en el intervalo anterior?

c) **(1 punto)** Determine el tamaño muestral mínimo para que el error máximo cometido al construir un intervalo de confianza, con el mismo nivel de confianza, sea 2 g.

B.4.a) $p(z \le z_{\alpha/2}) = \frac{1+0{,}96}{2}$; $z_{\alpha/2} = 2{,}054$

Intervalo de confianza para la media: $\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ , } \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (224{,}9 \text{ ; } 235{,}1)$

B.4.b) $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 5{,}1 \text{ } gramos$

B.4.c) $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$; $n = \left(z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = 659{,}04$; La muestra debe ser de al menos 660 tarros