Paco Muñoz. IES Virgen de la Cabeza – Marmolejo (Jaén)

A.1)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{m}{2x}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x-me^x+m}{2x(e^x-1)}\right)=\left(\frac{0}{0}\right)= \text{ (L'Hopital) } =\lim_{x\to 0}\left(\frac{2-me^x}{2(e^x-1)+2xe^x}\right)=\left(\frac{2-m}{0}\right)$$

Como el límite es finito, debe ser $2-m=0$; $m=2$

Volvemos a hacer L'Hopital

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{-me^x}{2e^x+2e^x+2xe^x}\right)=\frac{-m}{4}=\frac{-1}{2}$$

A.2) La función $f(x)=x^4$ es una "parábola", con el vértice en *(0 , 0)* .

Una recta horizontal tiene ecuación $y=a$

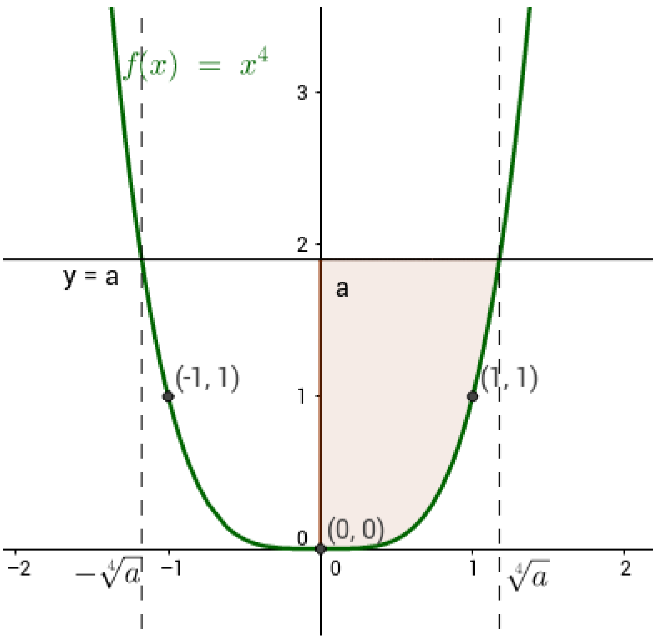
Igualamos las ecuaciones para obtener los puntos de corte: $x=\pm\sqrt[4]{a}$

Podemos partir la región por la mitad y tenemos:

$$\int_0^{\sqrt[4]{a}}(a-x^4)\,dx=\left[ax-\frac{x^5}{5}\right]_0^{\sqrt[4]{a}}=$$

$$=a\sqrt[4]{a}-\frac{\sqrt[4]{a^5}}{5}=\sqrt[4]{a^5}-\frac{\sqrt[4]{a^5}}{5}=\frac{4\sqrt[4]{a^5}}{5}$$

Este resultado se iguala a $\frac{4}{5}$ y obtenemos $a=1$. La recta buscada es $\mathbf{y=1}$ geogebra



A.3.a) $\begin{vmatrix}2 & -4\\ 5 & -11\end{vmatrix}=-2\neq 0 \;\rightarrow\; r(A)\geq 2$

$$\begin{vmatrix}2 & -4 & 2\\ 5 & -11 & 9\\ 1 & -3 & 5\end{vmatrix}=0 \;\rightarrow\; r(A)=2$$

Matriz ampliada: $\begin{vmatrix}2 & -4 & 1\\ 5 & -11 & \lambda\\ 1 & -3 & 2\end{vmatrix}=2\lambda-8 \;\rightarrow\; \begin{cases} si\ \lambda=4 \rightarrow r(\bar{A})=2 \rightarrow Sist.Com.Indet.\\ si\ \lambda\neq 4 \rightarrow r(\bar{A})=3 \rightarrow Sist.Incomp.\end{cases}$

A.3.b) En vista del apartado anterior el sistema queda:

$$\left.\begin{matrix}2x-4y=1-2t\\ 5x-11y=4-9t\end{matrix}\right\} \;;\quad x=\frac{\begin{vmatrix}1-2t & -4\\ 4-9t & -11\end{vmatrix}}{-2}=\frac{5-14t}{-2} \;;\quad y=\frac{\begin{vmatrix}2 & 1-2t\\ 5 & 4-9t\end{vmatrix}}{-2}=\frac{3-8t}{-2} \;;\quad z=t$$

A.4.a) $r:\begin{cases} P(1,1,1) \\ \vec{v}=(2,-1,0) \end{cases}$. Con el vector $\bar{v}$ se hace un plano perpendicular a r que pase por A :

$\pi: 2x-y+D=0$. Como pasa por A:

$A: 2+1+D=0 \;\; ; \;\; D=-3 \;\; ; \;\; \pi: 2x-y-3=0$

Hallamos el punto de corte entre r y π sustituyendo un punto genérico de r en π :

$2(1+2\lambda)-(1-\lambda)-3=0 \;\; ; \;\; lambda=\dfrac{2}{5} \;\; ; \;\; M(\dfrac{9}{5},\dfrac{3}{5},1)$

$\overline{M}$ es el punto medio del segmento $\overline{AA'}$:

$\vec{m}=\dfrac{\vec{a}+\vec{a'}}{2} \;\; ; \;\; \vec{a}'=2\vec{m}-\vec{a}=(\dfrac{13}{5},\dfrac{11}{5},0) \;\; ; \;\; A'(\dfrac{13}{5},\dfrac{11}{5},0)$ geogebra

A.4.b) Usaremos el punto A y los vectores $\overline{AP}$ y $\bar{v}$:

$\alpha:\begin{cases} A(1,-1,1) \\ \vec{AP}=(0,2,0) \\ \vec{v}=(2,-1,0) \end{cases} \;\; ; \;\; \alpha:\begin{cases} x=1+2\mu \\ y=-1+2\lambda-\mu \\ z=1 \end{cases}$ geogebra

B.1.a) $Dom(f)=\mathbb{R}$. Asíntotas verticales no tiene

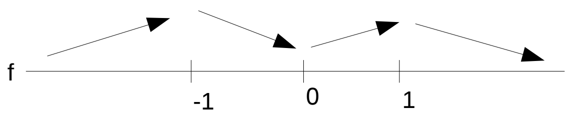
Asíntotas horizontales:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=(+\infty\cdot 0)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^{x^2}}=\left(\dfrac{0}{0}\right) \; (L'Hopital) \; =\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{2xe^{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{x^2}}=0$. Asint. Hor.: y = 0

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=$ *Igual que el anterior puesto que f es simétrica*

B.1.b) $f'(x)=2xe^{-x^2}-2x^3e^{-x^2}$

$f'=0 \;\; ; \;\; 2xe^{-x^2}(1-x^2)=0 \;\; ; \;\; \begin{cases} x=0 \\ x=\pm 1 \end{cases}$

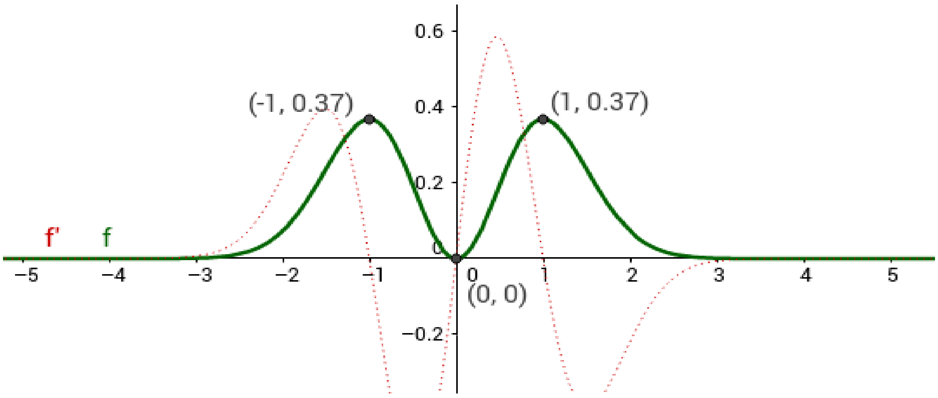


Decreciente en (-1 , 0) y en (1 , +∞) . Creciente en (-∞ ,-1) y en (0 , 1)

Extremos: Máximos (-1 , 1/e) y (1 , 1/e)

Mínimo (0 , 0) (Absoluto) geogebra

B.1.c)



B.2) $$I=\int \frac{x}{1+\sqrt{x}}dx=\left[\begin{matrix} t=\sqrt{x} \;\; ; \;\; t^2=x \\ dt=\dfrac{dx}{2\sqrt{x}} \;\; ; \;\; dx=2t\,dt \end{matrix}\right]=\int \frac{t^2}{1+t}2t\,dt=2\int \frac{t^3}{1+t}dt=2I_1$$

Ahora tenemos una integral racional. Se hace el cociente y obtenemos:

$\dfrac{t^3}{t+1}=t^2-t+1-\dfrac{1}{1+t}$. Por tanto $I_1=\dfrac{t^3}{3}-\dfrac{t^2}{2}+t-\ln|1+t|$

$$I=2\left(\frac{\sqrt{x^3}}{3}-\frac{x}{2}+\sqrt{x}-\ln|1+\sqrt{x}|\right)+K$$

B.3.a) Calculamos la matriz: $A\cdot B^t+\lambda I=\begin{pmatrix} \lambda+1 & 1 & 1 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Hacemos determinantes: $|A\cdot B^t+\lambda I|=0 \;\; \rightarrow \;\; rang(A\cdot B^t+\lambda I)<3$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda-1 & -1 \end{vmatrix}=-\lambda$ Este menor vale 0 si $\lambda = 0$. Pero en este caso, la matriz queda

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Todas las columnas son iguales. El rango es 1.

Conclusión: Si $\lambda \neq 0$, el rango es 3
Si $\lambda = 0$, el rango es 1

[geogebra]

B.3.b) $CX-X=2I \;\; ; \;\; (C-I)X=2I \;\; ; \;\; X=(C-I)^{-1}\cdot 2I=2(C-I)^{-1}$

C − I

$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Inversa [C − I]

$\rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

2 · Inversa [C − I]

$\rightarrow \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

B.4) $r_1:\begin{cases} A(0,0,0) \\ \vec{u}=(1,1,1) \end{cases}$; $r_2:\begin{cases} B(1,3,0) \\ \vec{v}=(1,1,-1) \end{cases}$. Utilizaremos directamente la fórmula.

$$d(r_1,r_2)=\frac{\left|[\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}]\right|}{|\vec{u}\times\vec{v}|}=\sqrt{2}$$

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

a = Determinante[M]

$\rightarrow$ a = 4

ProductoVectorial[u, v]

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Longitud[ProductoVectorial[u, v]]

$\rightarrow \sqrt{2}\cdot 2$

geogebra