Paco Muñoz. IES Virgen de la Cabeza – Marmolejo (Jaén)

A.1) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)-a\,sen\,x+x\cos(3x)}{x^2}=\left(\frac{0}{0};L'Hopital\right)=$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+1}-a\cos x+\cos(3x)-3x\,sen(3x)}{2x}=\left(\frac{2-a}{0}\right)$$

Para que el resultado sea finito se debe cumplir $2-a=0\;\;;\;\;a=2$

En este caso volvemos a aplicar L'Hopital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{(x+1)^2}+a\,sen\,x-3\,sen(3x)-3\,sen(3x)-9\,x\cos(3x)}{2}=\frac{-1}{2}$$

A.2) Se necesita conocer *f(1)* y para ello es necesario hacer la integral de *f'*, para obtener *f*.

$$f(x)=\int f'(x)dx$$

Es una integral racional

$$\int\frac{(x-1)^2}{x+1}dx=\int\frac{x^2-2x+1}{x+1}dx=(\text{se hace la división})=\int\left(x-3+\frac{4}{x+1}\right)dx=\frac{x^2}{2}-3x+4\ln|x+1|+K$$

Como $f(0)=0\;\rightarrow\;K=0\;\rightarrow\;f(x)=\frac{x^2}{2}-3x+4\ln|x+1|$

$$f(1)=\frac{1}{2}-3+4\ln 2=\frac{-5+8\ln 2}{2}$$

$$t:\quad y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

$$f'(1)=0$$

$$t:\quad y=\frac{-5+8\ln 2}{2}$$

A.3.a) $X=A^{-1}(2A-B)$; $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix}$; $X=\begin{pmatrix}13 & -9 & -5\\ 8 & -5 & -4\\ 6 & -5 & -1\end{pmatrix}$

A.3.b) $B^2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=I$ → $B^3=B$ → $B^4=I$; $B^{2016}=(B^2)^{1013}=I^{1013}=I$

A.4.a) El vector director de la recta será el vector director del plano pedido. Obtenemos el vector por producto vectorial:

$$\vec{n}=\begin{vmatrix}i & j & k\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=(0,2,-1)$$

La ecuación del plano será: $\pi: 2y-z+D=0$. Imponemos que pase por el punto P, y se obtiene:

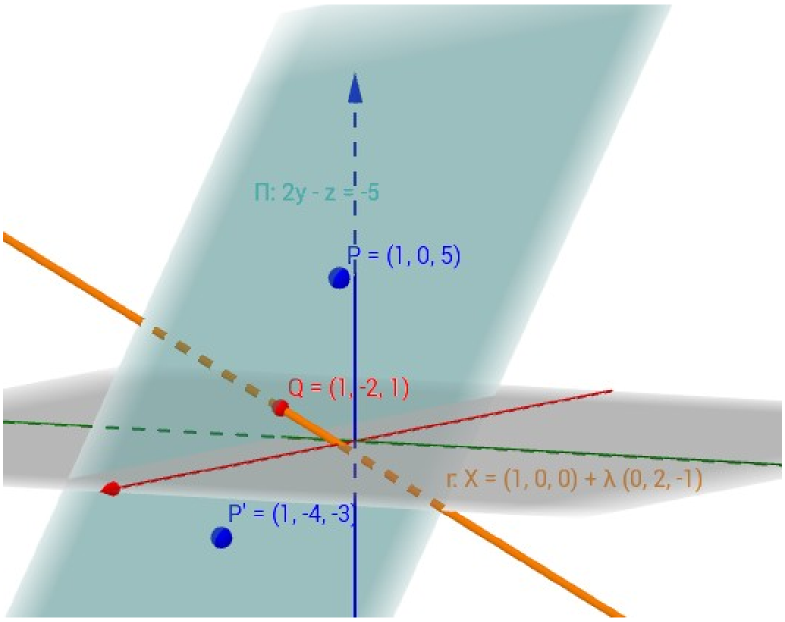
$$\pi: 2y-z+5=0.$$

A.4.b) Calculamos el punto de corte entre la recta y el plano del apartado anterior: Q(1 , -2 , 1)

Este punto da la distancia entre P y la recta: $d(P,r)=|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{20}\,ud$

Q es el punto medio entre P y su simétrico P':

$$\frac{\vec{p}+\vec{p}\,'}{2}=\vec{q} \quad ; \quad \vec{p}\,'=2\vec{q}-\vec{p}=(1,-4,-3) \quad ; \quad P'(1,-4,-3)$$



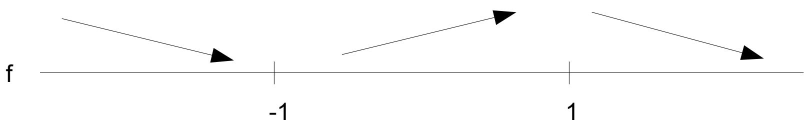
B.1.a) Al igualar a 0 el denominador la ecuación no tiene solución, por lo que el dominio de la función es ℝ, y entonces no tiene asíntotas verticales.

Veamos las horizontales: $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2+1}=0$. Tiene una asíntota horizontal en *y = 0*.

No tiene oblícuas.

Cortes de la gráfica con la asíntota: $\frac{x}{x^2+1}=0 \quad ; \quad x=0$. Se cortan en el (0 , 0).

B.1.b) $f'(x)=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$. Se iguala a 0 y se obtiene x = ±1

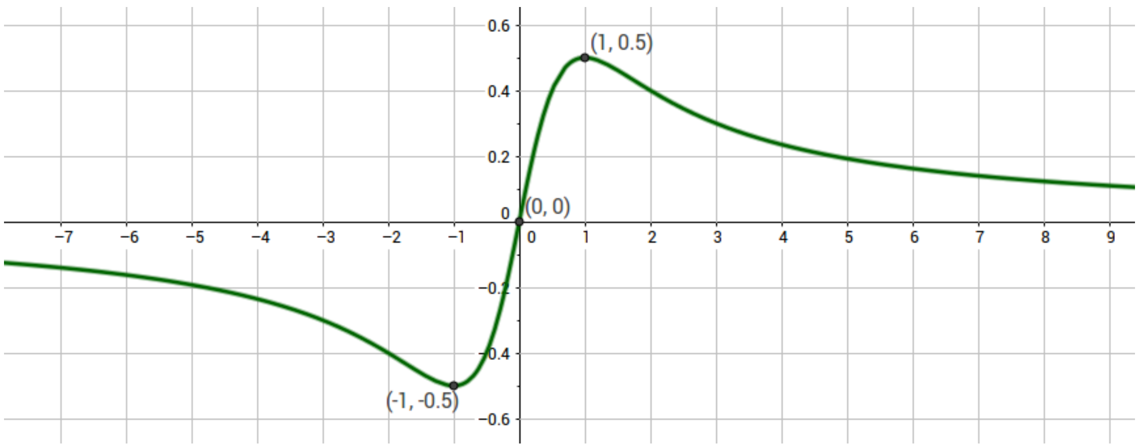


La función es creciente en el intervalo (-1 , 1)

La función es decreciente en los intervalos (-∞ , -1) y (1 , +∞)

Tiene un mínimo (absoluto) en (-1 , - ½) y un máximo (absoluto) en (1 , ½)

B.1.c)

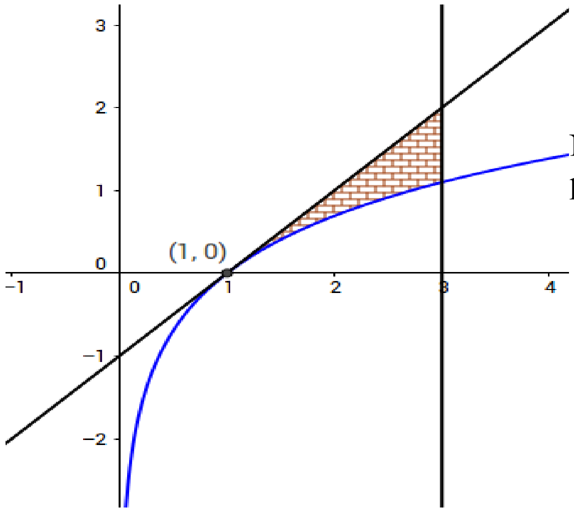


B.2.a) $t: \quad y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

$f'(1)=1 \quad ; \quad f(1)=0$

$t: \quad y=1(x-1)+0 \quad ; \quad y=x-1$

B.2.b)



$A=\int_1^3 (x-1-\ln(x))\,dx$.

Necesitamos hacer la integral del logaritmo. Por partes:

$$\int \ln(x)\,dx=\left[\begin{matrix} u=\ln(x) & ; & du=\frac{1}{x}dx \\ dv=dx & ; & v=x \end{matrix}\right]=$$

$$x\cdot\ln(x)-\int dx=x\cdot ln(x)-x$$

$$A=\left[\frac{x^2}{2}-x-x\cdot ln(x)+x\right]_1^3=\frac{9}{2}-3\ln 3-\frac{1}{2}=(4-3\ln 3)\,u^2$$

B.3.a) Matriz del sistema: $A=\begin{pmatrix} 3\alpha-1 & 2 \\ \alpha & 1 \\ 3\alpha & 3 \end{pmatrix}$. Estudiamos el rango de los menores de orden 2:

Las filas 2ª y 3ª son proporcionales, por lo que podemos descartar la 3ª, no aporta nada al rango

$$\begin{vmatrix} 3\alpha-1 & 2 \\ \alpha & 1 \end{vmatrix}=\alpha-1 \quad . \begin{cases} \text{Si } \alpha=1 & \rightarrow r(A)=1 \\ \text{Si } \alpha\neq 1 & \rightarrow r(A)=2 \end{cases}$$

Matriz ampliada: $\bar{A}=\begin{pmatrix} 3\alpha-1 & 2 & 5-\alpha \\ \alpha & 1 & 2 \\ 3\alpha & 3 & \alpha+5 \end{pmatrix}$. Veamos cuándo el rango es 3

$$\begin{vmatrix} 3\alpha-1 & 2 & 5-\alpha \\ \alpha & 1 & 2 \\ 3\alpha & 3 & \alpha+5 \end{vmatrix}=\alpha^2-2\alpha+1 \quad . \begin{cases} \text{Si } \alpha=1 & \rightarrow r(\bar{A})=1 \\ \text{Si } \alpha\neq 1 & \rightarrow r(\bar{A})=3 \end{cases}$$

Conclusión: $\begin{cases} \text{Si } \alpha=1 & \rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado} \\ \text{Si } \alpha\neq 1 & \rightarrow \text{Sistema incompatible} \end{cases}$

B.3.c) Nos quedamos sólo con una ecuación, por ejemplo la segunda: $x+y=2 \quad \rightarrow \begin{cases} x=\lambda \\ y=2-\lambda \end{cases}$

$x=4\,,\,y=-2$. Sí existe: (4 , -2)

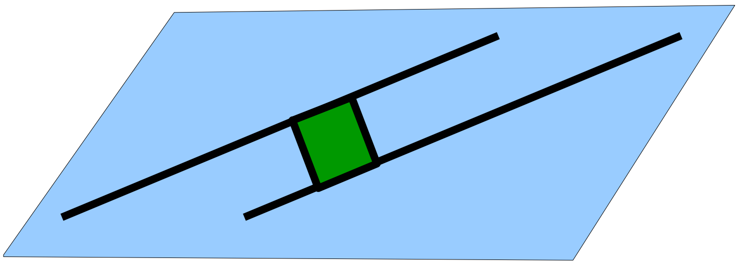
B.4.a) Obtenemos un punto y el vector director de cada recta:

$$r:\begin{cases} P(1,1,1) \\ \vec{v}=(2,-1,0) \end{cases} \quad ; \quad s:\begin{cases} Q(1,-1,-1) \\ \vec{u}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(2,-1,0) \end{cases} \quad ; \quad \overrightarrow{PQ}=(0,-2,-2) \quad .$$

$rang(\vec{v},\vec{u})=1$ y $rang(\vec{v},\vec{u},\overrightarrow{PQ})=2$. Las rectas son paralelas disjuntas. Son coplanarias.

Plano que las contiene

$$\pi:\begin{cases} P(1,1,1) \\ \vec{v}=(2,-1,0) \\ \overrightarrow{PQ}=(0,-2,-2) \end{cases} = \begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=1-\lambda-2\mu \\ z=1-2\mu \end{cases}$$



B.4.b) Como las rectas son paralelas, tenemos que hallar la distancia entre ellas.

$$d(r,s)=d(P,s)=\frac{|\overrightarrow{PQ}\times\vec{u}|}{|\vec{u}|}=\frac{\left|\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}\right|}{\sqrt{5}}=\frac{|(2,-4,-4)|}{\sqrt{5}}=\frac{6}{\sqrt{5}} \quad .$$

Esta distancia es el lado del cuadrado. El área será: $\frac{36}{5}u^2$