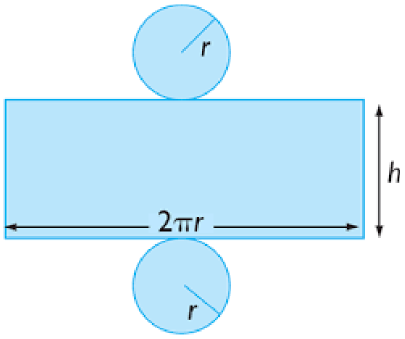
Paco Muñoz. IES Virgen de la Cabeza – Marmolejo (Jaén)

Ejercicio 1.- [2'5 puntos] Se quiere construir un bote de conservas cilíndrico, con tapa, de un litro de capacidad. Calcula las dimensiones del bote para que en su construcción se utilice la menor cantidad posible de hojalata.



A.1.a) Volumen del cilindro: $V=\pi r^2 h \quad ; \quad V=1 \;\rightarrow\; h=\dfrac{1}{\pi r^2}$

Superficie del cilindro: $S=2\pi r h+2\pi r^2$.

Sustituimos *h*: $S=2\pi r\dfrac{1}{\pi r^2}+2\pi r^2=\dfrac{2}{r}+2\pi r^2$

Derivamos para calcular el mínimo:

$S'=\dfrac{-2}{r^2}+4\pi r \quad ; \quad S'=0 \;\rightarrow\; \dfrac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$.

Se comprueba que es mínimo sustituyendo un valor inferior y otro superior:

$S'(0{,}1)<0 \quad ; \quad S'(1)>0 \;\rightarrow\; \dfrac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$ es el mínimo .

Soluciones: $r=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}\; dm \quad ; \quad h=\sqrt[3]{\dfrac{4}{\pi}}\; dm$

Ejercicio 2.- [2'5 puntos] Calcula

$$\int \frac{\sqrt{2x+1}}{2x+1+\sqrt{2x+1}}\,dx \qquad (\text{sugerencia} : t=\sqrt{2x+1}).$$

A.2) $\left[\begin{array}{c} t=\sqrt{2x+1} \\ t^2=2x+1 \\ 2t\,dt=2dx \end{array}\right] \qquad I=\int \dfrac{t}{t^2+t}\,t\,dt=\int \dfrac{t^2}{t^2+t}\,dt= \;(simplificamos)\; =\int \dfrac{t}{t+1}\,dt$.

Tenemos una racional. Se hace la división y se obtiene: $I=\int 1\,dt-\int \dfrac{1}{t+1}\,dt=t-\ln|t+1|$.

Deshacemos el cambio de variable: $I=\sqrt{2x+1}-\ln\left|\sqrt{2x+1}+1\right|+K$

Ejercicio 3.- Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} k & 1+k \\ 1-k & 0 \end{pmatrix}$. Determina, si existen, los valores de k en cada uno de los casos siguientes:

a) **[0'75 puntos]** rango$(A) = 1$.

b) **[0'75 puntos]** $A^2 = A$.

c) **[0'5 puntos]** A tiene inversa.

d) **[0'5 puntos]** $\det(A) = -2$.

A.3.a) Hacemos el determinante: $|A| = -1+k^2$; $|A| = 0$ → $k = \pm 1$

Para estos valores de *k* el rango es 1 (no es 0 porque siempre hay algún elemento que no es 0).

A.3.b) $A^2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & k^2+k \\ -k^2+k & -k^2+1 \end{pmatrix}$

Para que se cumpla la igualdad debe ser *k = 1* (debe cumplir las cuatro ecuaciones)

A.3.c) Igual que el apartado a: para que tenga inversa $|A| \neq 0$; $k \neq \pm 1$

A.3.d) $-1+k^2 = -2$ No hay solución

Ejercicio 4.- **[2'5 puntos]** Determina el punto de la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = y+1 = \dfrac{z}{3}$ que equidista de los planos

$$\pi \equiv x+y+z+3=0 \quad \text{y} \quad \pi' \equiv \begin{cases} x = -3+\lambda \\ y = -\lambda+\mu \\ z = -6-\mu \end{cases}$$

A.4) Tomamos un punto genérico de r y usamos la fórmula de la distancia de un punto a un plano.

Para ello necesitamos las ecuaciones generales de los planos:

$$\pi' : \begin{vmatrix} x+3 & 1 & 0 \\ y & -1 & 1 \\ z+6 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad x+y+z+9=0$$

Punto de *r*: *P(1 + 2t , –1+t , 3t)*

$$d(P,\pi) = d(P,\pi') \quad ; \quad \frac{|1+2t-1+t+3t+3|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{|1+2t-1+t+3t+9|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}$$

Se eliminan los denominadores y los valores absolutos y queda:

$6t+3 = \pm(6t+9)$; $t = -1$. El punto es: $P(-1,-2,-3)$

SOLUCIONES

Prueba de Acceso a la Universidad. Universidades de Andalucía **Matemáticas II**

Examen 6. Año 2016

Paco Muñoz. IES Virgen de la Cabeza – Marmolejo (Jaén)

Ejercicio 1.- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = |x^2 - 4|$.

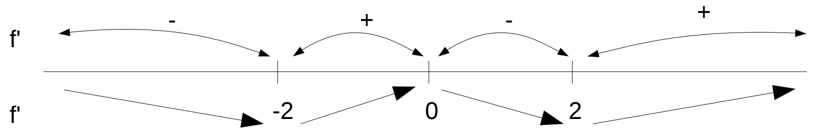
a) **[1'5 puntos]** Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcula sus extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) **[1 punto]** Calcula la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -1$.

B.1.a) Convertimos la función en una a trozos: $f(x) = \begin{cases} x^2-4 \ , & si \ \ x \leq -2 \\ -x^2+4 \ , & si \ \ -2 < x < 2 \\ x^2-4 \ , & si \ \ x \geq 2 \end{cases}$

Hacemos la derivada para estudiar el crecimiento:

$f'(x) = \begin{cases} 2x \ , & si \ \ x < -2 \\ -2x \ , & si \ \ -2 < x < 2 \\ 2x \ , & si \ \ x > 2 \end{cases}$. Se iguala a *0* y solo se obtiene como resultado *x = 0*



Decreciente en : $(-\infty , -2)$ y $(0 , 2)$. Creciente en : $(-2 , 0)$ y $(2 , +\infty)$.

Máximo relativo en (0 , 4) . Mínimos absolutos en (–2 , 0) y en (2 , 0)

B.1.b) Recta tangente: $t: \quad y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$f'(-1) = 2 \quad ; \quad f(-1) = 3$

$t: \quad y = 2(x+1)+3 \quad ; \quad y = 2x+5$

Recta normal: $t: \quad y = \dfrac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$

$f'(-1) = 2 \quad ; \quad f(-1) = 3$

$t: \quad y = \dfrac{-1}{2}(x+1)+3 \quad ; \quad y = \dfrac{-1}{2}x + \dfrac{5}{2}$

Ejercicio 2.- [2'5 puntos] Determina la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que

$$f''(x) = -2\,\mathrm{sen}(2x), \quad f(0)=1 \text{ y } f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.$$

B.2) Hacemos la integral dos veces para llegar a la función:

$$I_1=\int -2\,sen(2x)\,dx=\cos(2x)+K_1$$

$$I_2=\int(\cos(2x)+K_1)dx=\frac{1}{2}\int 2\cos(2x)\,dx+\int K_1\,dx=\frac{1}{2}sen(2x)+K_1x+K_2$$

Sustituimos los valores que conocemos:

$$f(0)=1 \;\rightarrow\; K_2=1$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \;\rightarrow\; K_1\frac{\pi}{2}+1=0 \;\rightarrow\; K_1=\frac{-2}{\pi}$$

Ejercicio 3.- Considera la matriz: $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda+1 \\ \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) [1'5 puntos] Determina, si existen, los valores de λ para los que $A^{-1}=2I-A$ (siendo I la matriz identidad de orden 3).

b) [1 punto] Determina, si existen, los valores de λ para los que la matriz $A+A^T$ no tiene inversa (A^T es la matriz traspuesta de A).

B.3.a) $|A|=1\neq 0 \;\rightarrow$ A siempre tiene inversa

Hacemos los cálculos de las matrices:

2I − A

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -k-1 \\ -k & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Inversa [A]

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -k-1 \\ -k & 1 & k^2+k+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Igualamos los dos resultados y obtenemos la ecuación: $k^2+k+1=1 \;\rightarrow\; \lambda=0\,,-1$

B.3.b) A + Traspone [A]

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & k & k+1 \\ k & 2 & -1 \\ k+1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

El determinante debe ser igual a *0* :

Determinante [A + Traspone [A]]

$$\rightarrow \; -6k^2-6k+4$$

geogebra

Resolvemos la ecuación y se obtiene: $\lambda=-4\,,1$

Ejercicio 4.- Considera el plano π de ecuación $6x - my + 2z = 1$ y la recta r dada por

$$\frac{x-1}{-3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{-1}$$

a) **[1 punto]** Calcula m en el caso en que la recta r es perpendicular al plano π.

b) **[1'5 puntos]** ¿Existe algún valor de m para el que la recta r esté contenida en el plano π?.

B.4.a) El vector normal del plano y el director de la recta deben ser paralelos, o sea, proporcionales:

$\vec{n}=(6,-m,2)$ **,** $\vec{v}=(-3,2,-1)$ **;** $\frac{6}{-3}=\frac{-m}{2}=\frac{2}{-1}$ → $m=4$

B.4.b) El vector normal del plano y el director de la recta deben ser perpendiculares:

$\vec{n}\cdot\vec{v}=0$ → $m=10$. Con esto la recta es paralela al plano. Puede ser disjunta o contenida.

Para esto cualquier punto de la recta debe estar en el plano. Sustituimos el punto conocido de la recta en el plano:

$A(1,-1,-2)$: $6\cdot 1-10\cdot(-1)+2\cdot(-2)=1$. Es falso: la recta nunca estará contenida en el plano.