Paco Muñoz. IES Virgen de la Cabeza – Marmolejo (Jaén)

A.1.a) $Dom(f)=(0,+\infty)$

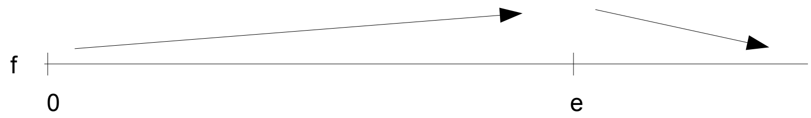
Asíntotas horizontales:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)(L'Hopital)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$. Asíntota Horizontal *y = 0.*

Asíntotas verticales:

$\lim\limits_{x\to0^+} f=\left(\frac{-\infty}{0^+}\right)=-\infty$. Asíntota vertical *x = 0.*

A.1.b) Se iguala la derivada a 0 y se resuelve: $f'=\frac{1-\ln x}{x^2}$; $f'=0$; $x=e$



Creciente: *(0 , e)* Decreciente: *(e , +∞)* Máximo: (e , 1/e)

A.2.a) Tangente horizontal *x = 0 → f'(0) = 0*

$f'=ae^x-b$; $f'(0)=0$; $a=b$

$$\int_0^1 f=\left[ae^x-b\frac{x^2}{2}\right]_0^1=ae-\frac{b}{2}-a=ae-\frac{a}{2}-a=\frac{2ae-3a}{2}$$

$$\frac{2ae-3a}{2}=e-\frac{3}{2} \rightarrow \frac{a(2e-3)}{2}=\frac{2e-3}{2} \rightarrow a=1 \;;\; b=1$$

A.3.a) Hacemos la operación y obtenemos la matriz B: $B := A - k\,I$

geogebra

$$\rightarrow \quad \mathbf{B} := \begin{pmatrix} -k+2 & 1 & 0 \\ 0 & -k+1 & -1 \\ 0 & 2 & -k+4 \end{pmatrix}$$

Hacemos su determinante, lo igualamos a 0 y resolvemos la ecuación (Rufini):

Determinante[B] $\rightarrow \quad -k^3+7k^2-16k+12$

Resuelve[Determinante[B] = 0, k] $\rightarrow \quad \{k=2, k=3\}$

- Si $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq 3$: rang(B) = 3
- Si $\lambda = 2$ obtenemos la matriz C: $C := A - 2\cdot I$

  las filas 1 y 2 con las columnas 2 y 3 dan un menor de orden 2 distinto de 0. El rango es 2.

$$\rightarrow \quad \mathbf{C} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

- Si $\lambda = 3$ obtenemos la matriz D:

  las filas 1 y 2 con las columnas 2 y 3 dan un menor de orden 2 distinto de 0. El rango es 2.

D := A − 3I

$$\rightarrow \mathbf{D} := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

A.3.b) Es un sistema homogéneo. Como la matriz del sistema tiene rango 2, es compatible indeterminado. Según el menor elegido en el apartado anterior damos valor paramétrico a *x* y descartamos la 3ª ecuación:

$$x=\lambda \quad ; \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{0}{-1}=0 \quad ; \quad z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{0}{-1}=0$$

A.4.a) $r:\begin{cases} x=1-\lambda \\ y=-1 \\ z=\lambda \end{cases} ; \begin{cases} A(1,-1,0) \\ \vec{u}=(-1,0,1) \end{cases} \quad s:\begin{cases} x=2+\mu \\ y=2 \\ z=2+2\mu \end{cases} ; \begin{cases} B(2,2,2) \\ \vec{v}=(1,0,2) \end{cases}$ geogebra

Para que las rectas se crucen debe ocurrir: $r(\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v})=3$

Hacemos el determinante:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a = Determinante [M]

→ a = 9

Como es distinto de 0, el rango es 3.

Para hallar la recta perpendicular a ambas hacemos:

Punto de *r*: *P(1-λ,-1,λ)*. Punto de *s*: *Q(2+μ,2,2+2μ)* . Vector $\overline{PQ}$ = *(1+μ+λ,3,2+2μ-λ)*

$$\begin{cases} \overrightarrow{PQ}\perp u \rightarrow 2+3\mu-2\lambda=0 \\ \overrightarrow{PQ}\perp v \rightarrow 7+5\mu-\lambda=0 \end{cases} ; \begin{cases} \lambda=0 \\ \mu=-1 \end{cases} ; \begin{cases} P(1,-1,0) \\ Q(1-2,0) \end{cases}$$

La recta pedida es la que une P y Q: t = Recta [P, Q]

→ t: X = (1, -1, 0) + λ (0, 3, 0)

A.4.b) La distancia entre las rectas es el módulo del vector $\overline{PQ}$

$$d(r,s)=|\overline{PQ}|=3u$$

Ejercicio 1.- [2'5 puntos] Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$. Determina a,b,c sabiendo que la gráfica de f tiene tangente horizontal en el punto de abscisa $x=1$ y un punto de inflexión en $(-1,5)$.

B.1) Tangente horizontal en *x = 1*: $f'(1)=0 \quad ; \quad f'(x)=3x^2+2ax+b \quad ; \quad f'(1)=3+2a+b=0$

Punto de inflexión en *(–1 , 5)*: $f(-1)=5 \quad ; -1+a-b+c=5$

$f''(-1)=0 \quad ; \quad f''(x)=6x+2a \quad ; \quad f''(-1)=-6+2a=0$

Ya podemos despejar e ir sacando incógnitas: $a=3 \quad ; \quad b=-9 \quad ; \quad c=-6$

Ejercicio 2.- [2'5 puntos] Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{3x(2m-x)}{m^3}$, con $m>0$. Calcula el área del recinto encerrado por la gráfica de f y el eje OX.

B.2) Calculamos los puntos de corte con el eje X: $f=0 \quad ; \quad 3x(2m-x)=0 \quad ; \quad x=0 \quad , \quad x=2m$

Área: $$\left|\int_0^{2m}\frac{3x(2m-x)}{m^3}dx\right|=[\text{no es racional, es polinómica}]=\left|\frac{1}{m^3}\int_0^{2m}(6mx-3x^2)dx\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{m^3}\left[6m\frac{x^2}{2}-3\frac{x^3}{3}\right]_0^{2m}\right|=\left|\frac{1}{m^3}(12m^3-8m^3)\right|=4u^2$$

Ejercicio 3.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\left\{\begin{array}{rcl} x+(\lambda+1)y+z & = & 1 \\ \lambda y+z & = & 0 \\ \lambda y+\lambda z & = & \lambda \end{array}\right.$

a) **[1 punto]** Discútelo según los valores de λ.

b) **[0'75 puntos]** Resuélvelo para $\lambda=0$.

c) **[0'75 puntos]** Determina, si existe, el valor de λ para el que hay una solución en la que $z=2$. Calcula esa solución.

B.3.a) $A=\begin{pmatrix}1 & \lambda+1 & 1\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & \lambda & \lambda\end{pmatrix}$;

Empezamos tomando la 1ª y 2ª ecuaciones con *x , z*: $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$. Por tanto r(A) ≥ 2.

$|A|=\lambda^2-\lambda \quad ; \quad |A|=0 \quad ; \quad \lambda=0 \quad , \quad \lambda=1$.

Por tanto: 1. si $\lambda \neq 0$ y 1 → r(A) = r($\overline{A}$) = n = 3. Sist. Comp. Det.

2. si λ = 0 o 1 → r(A) = 2. Estudiamos la ampliada: $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & \lambda & \lambda\end{vmatrix}=\lambda$

2.1. si λ = 1 → r($\overline{A}$) = 3. Sist. Incomp.

2.2. si λ = 0 → r($\overline{A}$) = 2 , n = 3. Sist. Comp. Indet.

B.3.b) Utilizamos las ecuaciones 1ª y 2ª y despejamos *y* como valor paramétrico:

$$\left.\begin{array}{l} y=t \\ x+z=1-t \\ z=0 \end{array}\right\} \quad ; \quad \left.\begin{array}{l} y=t \\ x=1-t \\ z=0 \end{array}\right\}$$

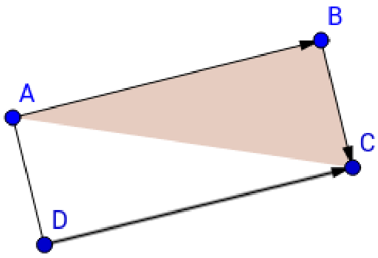
B.3.c) El sistema ahora es: $\begin{cases} x+(\lambda+1)\,y=-1 \\ \lambda\, y=-2 \\ \lambda\, y=-\lambda \end{cases}$. λ no es 0 puesto que en el apartado anterior es imposible z = 2. Por tanto podemos despejar en el sistema y queda: y = -1 , **λ = 2** , x = 2 .

Ejercicio 4.- Considera un rectángulo de vértices consecutivos A, B, C y D siendo $A(1,1,0)$ y $B(2,2,1)$. Sabiendo que la recta r que contiene a los puntos C y D pasa por el origen de coordenadas se pide:

a) **[0'75 puntos]** Halla unas ecuaciones paramétricas de r.

b) **[1 punto]** Calcula el área del triángulo ABC.

c) **[0'75 puntos]** Determina las coordenadas del punto D.



B.4.a) Si es un rectángulo, se cumple: $\vec{AB}=\vec{DC}=(1,1,1)$. Con este vector y el punto O ya tenemos la recta:

$$r:\begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$$

B.4.b) Usaremos la fórmula: $\acute{A}rea=\frac{1}{2}|\vec{AB}\times\vec{AC}|$.

Necesitamos obtener el punto C:

C es un punto de *r* : *C(λ , λ , λ).*

Como tenemos un rectángulo, los vectores $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son perpendiculares:

$$(1,1,1)\cdot(\lambda-2,\lambda-2,\lambda-1)=0 \;\rightarrow\; \lambda=\frac{5}{3} \;\rightarrow\; C\left(\frac{5}{3},\frac{5}{3},\frac{5}{3}\right)$$

Hacemos el producto vectorial: $\vec{AB}\times\vec{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{vmatrix}=(1,-1,0)$.

Calculamos ya el área: $\acute{A}rea=\frac{1}{2}\sqrt{2}\,u^2$

B.4.c) $\vec{DC}=\left(\frac{5}{3}-d_1\ ,\ \frac{5}{3}-d_2\ ,\ \frac{5}{3}-d_3\right)=(1,1,1) \;\rightarrow\; D\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$