Paco Muñoz. IES Virgen de la Cabeza – Marmolejo (Jaén)

Ejercicio 1.- [2'5 puntos] Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=(e^{ax}+b)x$, con $a\neq 0$. Calcula a y b sabiendo que f tiene un extremo relativo en $x=0$ y su gráfica, un punto de inflexión en el punto cuya abscisa es $x=1$.

A.1.a) Calculamos las derivadas: $f'(x)=ae^{ax}x+(e^{ax}+b)\ \ ;\ \ f''(x)=a^2e^{ax}x+ae^{ax}+ae^{ax}=ae^{ax}(ax+2)$

Extremo en *x = 0*: $f'(0)=0\ ;\ 1+b=0\ ;\ b=-1$

Punto de inflexión en *x = 1*: $f''(1)=0\ ;\ ae^a(a+2)=0\ ;\ a=-2\ \ (ya\ que\ a\neq 0)$

Ejercicio 2.- [2'5 puntos] Calcula el valor de $a>0$ para el que se verifica $\displaystyle\int_0^a \frac{x}{2+x^2}\,dx=1$.

A.2) Hacemos primero la integral indefinida. Es un logaritmo neperiano:

$$I=\int\frac{x}{2+x^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{2+x^2}dx=\frac{1}{2}\ln|2+x^2|+K$$

Ahora la integral definida:

$$D=\left[\frac{1}{2}\ln|2+x^2|+K\right]_0^a=\frac{1}{2}(\ln(2+a^2)-\ln 2)\ \ ;\ \ D=1\ ;\ \ln(2+a^2)=2+\ln 2\ ;\ a^2=e^{2+\ln 2}-2=e^2\cdot 2-2$$

$$a=+\sqrt{e^2\cdot 2-2}$$

Ejercicio 3.- Considera el sistema de ecuaciones dado en forma matricial mediante $AX=B$ siendo

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\-1&m+2&m\\1&1&m+2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1-m\\m\\7\end{pmatrix}\ \text{ y }\ X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.$$

a) [1'5 puntos] Discute el sistema según los valores de m.

b) [1 punto] Resuelve el sistema para $m=-3$ y determina en dicho caso, si existe, una solución en la que $x=2$.

A.3.a) La matriz del sistema es A, y la ampliada es AB. Estudiamos el rango de A:

$|A|=m^2+3m\ ;\ |A|=0\ ;\ m=-3\ ,\ m=0$

1. Si m ≠ −3 y m ≠ 0 : r(A) = r($\bar{A}$) = n = 3 ↦ Sist. Comp. Det.

2.1. Si m = −3 : $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\-1&-1&-3\\1&1&-1\end{pmatrix}\ ;\ \begin{vmatrix}1&2\\-1&-3\end{vmatrix}\neq 0$: r(A) = 2

Matriz ampliada: $\bar{A}=\begin{pmatrix}1&2&4\\-1&-3&-3\\1&-1&7\end{pmatrix}\ ;\ |\bar{A}|=0$: r($\bar{A}$) = 2 , n = 3 : Sist. Comp. Indet.

2.2. Si m = 0 : $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\-1&2&0\\1&1&2\end{pmatrix}\ ;\ \begin{vmatrix}1&2\\2&0\end{vmatrix}\neq 0$: r(A) = 2

Matriz ampliada: $\bar{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 7\end{pmatrix}$; $|\bar{A}|\neq 0$: r($\bar{A}$) = 3 : Sist. Incomp.

A.3.b) En este caso el sistema queda así: $\left.\begin{array}{r} x=t\\ y+2z=4-t\\ -y-3z=-3+t\end{array}\right\}$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}4-t & 2\\ -3+t & -3\end{vmatrix}}{-1}=6-t \quad ; \quad z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 4-t\\ -1 & -3+t\end{vmatrix}}{-1}=-1$$

Solución con x = 2 $\mapsto$ t = 2 ; y = 4 ; z = -1 $\mapsto$ (2 , 4 , -1)

Ejercicio 4.- Considera el plano π de ecuación $x+2y+z=1$.

a) [**1 punto**] Halla el punto de π más próximo al punto $(3,1,2)$.

b) [**1'5 puntos**] Determina la ecuación de un plano paralelo a π que forme con los ejes de coordenadas un triángulo de área $\sqrt{6}$.

A.4.a) Se pide el punto que daría la distancia del punto al plano:

P(3,1,2). Hacemos una recta perpendicular a π que pase por P utilizando el vector normal:

$r:\begin{cases}P(3,1,2)\\ \vec{n}=(1,2,1)\end{cases}$; $r:\begin{cases}x=3+t\\ y=1+2t\\ z=2+t\end{cases}$. El punto buscado es un punto de r: $Q(3+t,1+2t,2+t)$.

Q está en el plano: $3+t+2(1+2t)+(2+t)=1$; $t=-1$; $Q(2,-1,1)$

A.4.b) Como el plano pedido es paralelo a π, debe ser *α = x + 2y + z = k*

Los puntos de corte con los ejes son: $\begin{cases}A(0,0,k)\\ B(0,\frac{k}{2},0)\\ C(k,0,0)\end{cases}$. $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(0,\frac{k}{2},-k)\\ \overrightarrow{AC}=(k,0,-k)\end{cases}$.

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}i & j & k\\ 0 & \frac{k}{2} & -k\\ k & 0 & -k\end{vmatrix}=(\frac{-k^2}{2},-k^2,-\frac{k^2}{2}) \;;\; Área=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{6} \;;\; \frac{k^4}{4}+k^4+\frac{k^4}{4}=24 \;;$$

$$k^4=16=\pm 2$$

Ejercicio 1.- [2'5 puntos] De un terreno se desea vender un solar rectangular de 12 800 m^2 dividido en 3 parcelas iguales como las que aparecen en el dibujo.

Se quieren vallar las lindes de las tres parcelas (los bordes y las separaciones de las parcelas). Determina las dimensiones del solar y de cada una de las tres parcelas para que la longitud de la valla utilizada sea mínima.

B.1) x: base de una parcela ; y: altura de una parcela.

Superficie total: $3x\cdot y=12800 \;\; ; \;\; y=\dfrac{12800}{3x}$

Perímetro de las parcelas: $f=3x+3x+4y=6x+\dfrac{51200}{3x}$

Derivamos f para calcular el mínimo: $f'=6-\dfrac{51200}{3x^2} \;\; ; \;\; f'=0 \;\; ; \;\; x=\dfrac{160}{3}$

Comprobamos que es un mínimo: $f'(10)<0 \;\; ; \;\; f'(100)>0$. $x=\dfrac{160}{3}$ es un mínimo.

La parcela debe medir 160 m en la base y $\dfrac{12800}{160}=80$ en la altura.

Ejercicio 2.- [2'5 puntos] Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=-x^2+mx$ siendo $m>0$. Esboza el recinto limitado por la gráfica de f y la recta $y=-mx$ y calcula el valor de m para que el área de dicho recinto sea 36.

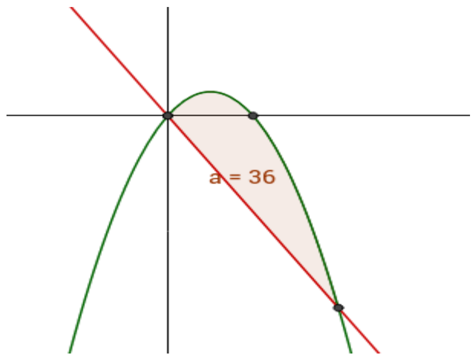
B.2) Tenemos una parábola. Calculamos el vértice y los cortes con los ejes:

Vértice: $x=\dfrac{m}{2} \;\; ; \;\; y=\dfrac{m^2}{4}$

Cortes: $(0\,,0) \;\; (m\,,0)$

Calculamos ahora los cortes entre la parábola y la recta:

$$-x^2+mx=-mx \quad ; \quad \begin{cases} x=0 \;\; , \;\; y=0 \\ x=2m \;\; , \;\; y=-2m^2 \end{cases}$$



Área:

$$\int_0^{2m}(-x^2+mx-(-mx))\,dx=\left[\frac{-x^3}{3}+mx^2\right]_0^{2m}=\frac{4m^3}{3}$$

$$\frac{4m^3}{3}=36 \quad ; \quad m=3$$

Ejercicio 3.- De los datos recabados en un informe sobre los beneficios obtenidos por las empresas A, B y C el pasado año, se desprende lo siguiente:

- la empresa B obtiene el mismo beneficio que las empresas A y C juntas.
- el beneficio de la empresa A es la media aritmética del de las otras dos.

a) **[1'5 puntos]** Determina si se puede hallar el beneficio de cada empresa sabiendo que A ha obtenido el doble que C.

b) **[1 punto]** Calcula el beneficio de cada empresa sabiendo que entre las tres han obtenido 210 millones de euros.

B.3.a) $\begin{cases} a+c=b \\ a=\dfrac{b+c}{2} \\ a=2c \end{cases}$; $\begin{cases} a-b+c=0 \\ 2a-b-c=0 \\ a-2c=0 \end{cases}$. Es un sistema homogéneo. Calculamos el rango.

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}=0$. El sistema tiene infinitas soluciones. No podemos saber el beneficio de cada empresa.

B.3.b) Utilizamos la segunda y tercera ecuaciones ya que tienen rango 2, y añadimos la nueva:

$\begin{cases} 2a-b-c=0 \\ a-2c=0 \\ a+b+c=210 \end{cases}$. Resolvemos por el método de Cramer:

$$a=\frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 210 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{420}{6}=70\,mill.€ \quad ; \quad b=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 210 & 1 \end{vmatrix}}{6}=\frac{630}{6}=105\,mill.€ \quad ; \quad c=210-(a+b)=35$$

Ejercicio 4.- Sea r la recta que pasa por los puntos $A(1,1,0)$ y $B(3,-1,1)$ y s la recta dada por

$$\begin{cases} x+2y &= -1 \\ y+z &= -1 \end{cases}$$

a) **[1'25 puntos]** Halla la ecuación general del plano que pasa por el origen de coordenadas y es paralelo a las rectas dadas.

b) **[1'25 puntos]** Halla unas ecuaciones paramétricas del plano que pasa por B y es perpendicular a s.

B.4.a) $\pi : \begin{cases} O(0,0,0) \\ \overrightarrow{AB}=(2,-2,1) \\ \vec{u}: director\ de\ s \end{cases}$.

Necesitamos el vector director de *s*. Lo obtenemos con el producto vectorial de los planos que forman la recta: $u=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(2,\ -1,\ 1)$

Ya podemos hacer la ecución general del plano: $\pi : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-x+2z=0$

B.4.b) El vector director de *s* lo utilizamos como normal del plano: $\vec{n}=(2,-1,1)$

No "inventamos" dos vectores perpendiculares a él: $\vec{a}=(1,2,0)$, $\vec{b}=(0,1,1)$. Estos dos vectores los utilizamos como directores del plano pedido:

$$\pi : \begin{cases} B(3,-1,1) \\ \vec{a}=(1,2,0) \\ \vec{b}=(0,1,1) \end{cases} \qquad \begin{cases} x=3+t \\ y=-1+2t+s \\ z=1+s \end{cases}$$