Tema 9. Problemas métricos

1. Ángulos entre rectas y planos

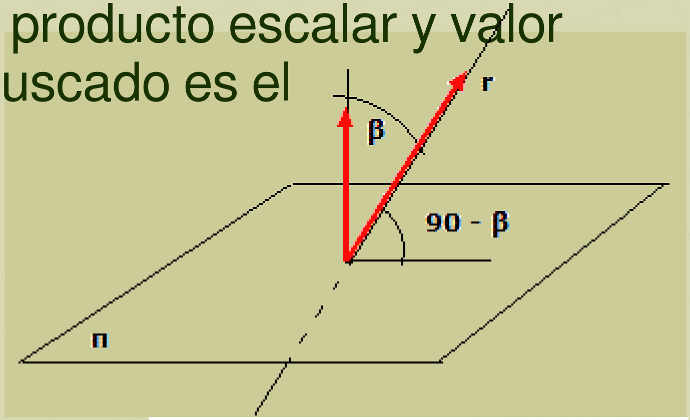
1. Ángulo entre dos rectas.

Usamos los dos vectores directores con el producto escalar y valor absoluto para obtener un ángulo agudo

$$\alpha: \quad \cos\alpha = \frac{|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2|}{|\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2|}$$

2. Ángulo entre una recta y un plano

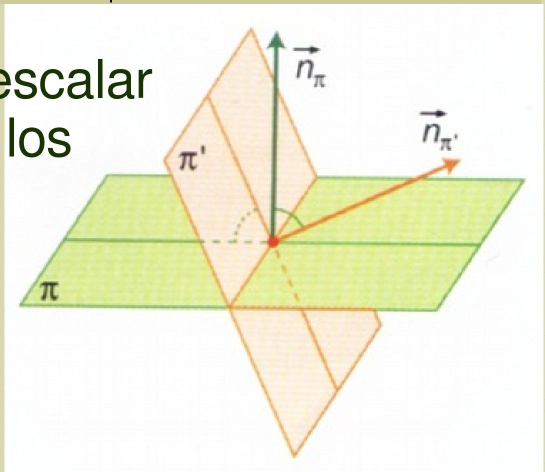
Usamos el director de la recta y el normal al plano con el producto escalar y valor absoluto para obtener un ángulo agudo. Pero el ángulo buscado es el complementario al así obtenido



$$\beta: \quad \cos\beta = \frac{|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2|}{|\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2|} \quad ; \quad \boldsymbol{\alpha = 90 - \beta}$$

3. Ángulo entre dos planos

Usamos los vectores normales de cada plano con el producto escalar y valor absoluto para obtener un ángulo agudo. El ángulo entre los vectores coincide con el ángulo entre los planos



$$\alpha: \quad \cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

2.1. Distancia entre un punto y un plano

2.1.1. Construyendo una recta perpendicular

Calcular la distancia del punto *P(1,2,3)* al plano *π: 3x + 2y + z – 1 = 0*

- Buscamos una recta perpendicular a *π* que pase por *P* usando el vector normal del plano:

$$r:\begin{cases} P(1,2,3) \\ \vec{v}=(3,2,1) \end{cases} \quad ; \quad r:\begin{cases} x=1+3\lambda \\ y=2+2\lambda \\ z=3+\lambda \end{cases}$$

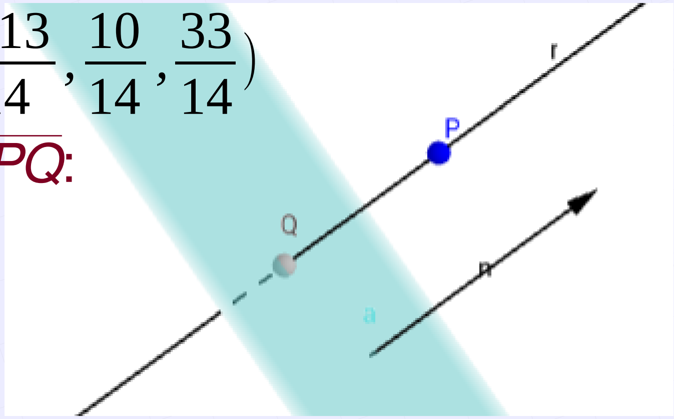
- Buscamos el punto de corte de esa recta con el plano, usando un punto genérico y sustituyéndolo en el plano:

$$3(1+3\lambda)+2(2+2\lambda)+(3+\lambda)-1=0 \quad ; \quad \lambda=\frac{-9}{14} \quad ; \quad Q\left(\frac{-13}{14},\frac{10}{14},\frac{33}{14}\right)$$

- La distancia del punto al plano es el módulo del vector $\overline{PQ}$:

$$d(P,\pi)=|\overrightarrow{PQ}|=\frac{9}{\sqrt{14}}u$$

Geogebra



2.1.2. Usando una fórmula

$$\begin{cases} P(p_1,p_2,p_3) \\ \pi: Ax+By+Cz+D=0 \end{cases} \quad ; \quad d(P,\pi)=\frac{|Ap_1+Bp_2+Cp_3+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

2.2. Distancia entre dos planos

Depende de su posición relativa:

2.2.1. Si son coincidentes o se cortan en una recta, la distancia es 0

2.2.2. Si son paralelos:

Se toma un punto cualquiera de un plano y se hace la distancia de ese punto al otro plano

2.3. Distancia entre una recta y un plano

Depende de su posición relativa:

2.3.1. Si la recta está contenida en el plano o se cortan en un punto, la distancia es 0

2.3.2. Si son paralelos:

Se toma un punto cualquiera la recta y se hace la distancia de ese punto al plano

2.4. Distancia entre un punto y una recta

2.4.1. Construyendo un plano perpendicular

Calcular la distancia del punto *P(1,2,3)* a la recta *r:* $\overline{x} = (1,0,0) + \lambda(3,2,1)$

- Buscamos una plano perpendicular a *r* que pase por *P* usando el vector director de la recta como normal del plano: $\pi: 3x+2y+z+D=0$
  - Como el plano pasa por P: $P\in\pi: 3\cdot 1+2\cdot 2+3+D=0 \quad ; \quad D=-10$

    $\pi: 3x+2y+z-10=0$
- Buscamos el punto de corte del plano y la recta usando un punto genérico de *r*:

$$A(1+3\lambda, 2\lambda, \lambda) \;\; ; \;\; \pi: 3(1+3\lambda)+2(2\lambda)+(\lambda)-10=0 \;\; ; \;\; \lambda=\frac{1}{2} \quad ; \quad A\left(\frac{5}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$$

- La distancia de *P* a *r* es el módulo del vector $\overline{PA}$

$$d(P,r)=|\overrightarrow{PA}|=\frac{\sqrt{38}}{2}u$$

Geogebra

2.4.2. Con un punto genérico de la recta:

Calcular la distancia del punto *P(1,2,3)* a la recta *r:* $\bar{x} = (1,0,0) + \lambda(3,2,1)$

- Buscamos directamente un punto *A* de la recta de forma que el vector $\overline{PA}$ sea perpendicular a *r*. El módulo de ese vector nos dará la distancia de *P* a *r:*

$$A(1+3\lambda, 2\lambda, \lambda) \rightarrow \vec{PA} \perp \vec{v} \rightarrow (3\lambda)\cdot 3+(2\lambda-2)\cdot 2+(\lambda-3)\cdot 1=0 \rightarrow \lambda=\frac{1}{2}$$

$$A\left(\frac{5}{2},1,\frac{1}{2}\right) \rightarrow \quad d(P,r)=|\vec{PA}|=\frac{\sqrt{38}}{2}u$$

2.4.3. Usando una fórmula

$$\begin{cases} P \\ r:(Q\ ,\ \vec{v}) \end{cases} \quad ; \quad d(P,r)=\frac{|\vec{PQ}\times\vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

Calcular la distancia del punto *P(1,2,3)* a la recta *r:* $\bar{x} = (1,0,0) + \lambda(3,2,1)$

$$\begin{cases} P(1,2,3) \\ r:(Q(1,0,0)\ ,\ \vec{v}=(3,2,1)) \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=(4,-9,6)$$

$$d(P,r)=\frac{\sqrt{4^2+9^2+6^2}}{\sqrt{3^2+2^2+1^2}}=\frac{\sqrt{38}}{2}u$$

2.5. Distancia entre dos rectas

Depende de su posición relativa:

2.5.1. Si son coincidentes o se cortan en un punto, la distancia es 0

2.5.2. Si son paralelas, se toma un punto cualquiera de una recta y se hace la distancia de ese punto a la otra recta

2.5.3. Si son cruzadas.

2.5.3.1. Desarrollando el problema con un plano paralelo

Calcular la distancia entre las rectas $r: \bar{x} = (3,2,1) + \lambda(3,2,1)$ y $s: \bar{x} = (0,0,1) + \lambda(1,2,3)$

- Buscamos un plano paralelo a *r* que contenga a *s*. Para ello usamos el punto de s y los vectores directores de cada recta:

  Interesa la ecuación general:

$$\begin{cases} r:(P, \vec{u}) \\ s:(Q, \vec{v}) \end{cases}$$

$$\pi: \begin{cases} Q(0,0,1) \\ \vec{u}=(3,2,1) \\ \vec{v}=(1,2,3) \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 4x-8y+4z-4=0 \quad ; \quad \pi = x-2y+z-1=0$$

- La distancia buscada es la de un punto cualquiera de *r* al plano, por lo que hay que seguir algún procedimiento anterior

$$d(r,s)=d(P,\pi)=\frac{\sqrt{6}}{6}u$$

Geogebra

2.5.3.2. Desarrollando el problema con dos puntos genéricos

Calcular la distancia entre las rectas *r:* $\overline{x} = (3,2,1) + \lambda(3,2,1)$ y *s:* $\overline{x} = (0,0,1) + \lambda(1,2,3)$

- Buscamos un punto de cada recta, *A* y *B*, de forma que el vector $\overline{AB}$ sea perpendicular a *r* y a *s* : El módulo de ese vector nos dará la distancia de *r* a s*:*

$$\begin{cases} A(3+3\lambda,2+2\lambda,1+\lambda) \\ B(\mu,2\mu,1+3\mu) \\ \overrightarrow{AB}=(\mu-3\lambda-3,2\mu-2\lambda-2,3\mu-\lambda) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}\perp\vec{u} \\ \overrightarrow{AB}\perp\vec{v} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}=0 \\ \overrightarrow{AB}\cdot\vec{v}=0 \end{cases} \rightarrow$$

Se hace la multiplicación y se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\rightarrow \begin{cases} 10\mu-14\lambda=13 \\ 14\mu-10\lambda=7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda=\frac{-7}{6} \;\; ; \;\; \mu=\frac{-1}{3} \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} A(-\frac{1}{2},-\frac{1}{3},-\frac{1}{6}) \\ B(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},0) \\ \overrightarrow{AB}=(\frac{1}{6},-\frac{1}{3},\frac{1}{6}) \end{cases} \rightarrow d(r,s)=d(A,B)=\frac{1}{\sqrt{6}}u$$

Geogebra

2.5.3.3. Mediante una fórmula

$$\begin{cases} r:(P,\vec{u}) \\ s:(Q,\vec{v}) \end{cases} \;\; ; \;\; d(r,s)=\frac{|[\overrightarrow{PQ},\vec{u},\vec{v}]|}{|\vec{u}\times\vec{v}|}$$

3. Áreas y volúmenes: triángulo y tetraedro

Área del triángulo formado por tres puntos: A , B , C

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$$

Volumen del tetraedro formado por cuatro puntos: A , B , C , D

$$\text{Volumen} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AC}\ ,\ \overrightarrow{AD}\right]\right|$$