EJERCICIO 1

a) **(0.5 puntos)** Si $A$ es una matriz de dimensión $m$ x $n$, indique la dimensión de una matriz $X$ si se verifica que $\left(A^t \cdot A\right) \cdot X = I_n$.

b) **(1.25 puntos)** Calcule dicha matriz $X$ en el caso en que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

c) **(0.75 puntos)** Calcule, si es posible, el producto $A \cdot \left(A^t \cdot A\right)$.

**A.1.a)** $\left(A^t_{n\times m} \cdot A_{m\times n}\right) = B_{n\times n}$ ; $B_{n\times n} \cdot X_{p\times q} = I_{n\times n}$ ; para que el producto sea posible X debe ser cuadrada *n x n*.

**A.1.b)** $X = \left(A^t \cdot A\right)^{-1} \cdot I = \left(A^t \cdot A\right)^{-1}$ ; B = Traspone[A] A ; X = Inversa[B]

$$\rightarrow \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \mathrm{X} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

**A.1.c)** C = A B

geogebra

$$\rightarrow \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & -2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2

Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}x^2 + 1 & si \quad x \le 2 \\ -x + a & si \quad x > 2 \end{cases}$, con $a > 0$.

a) **(1.3 puntos)** Calcule el valor del parámetro $a$ para que la función sea continua en su dominio. En este caso, ¿sería derivable en su dominio?

b) **(1.2 puntos)** Para el valor $a = 4$, represente gráficamente la función y halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = -1$.

**A.2.a)** Los dos trozos de la función son continuos y derivables en su parte del dominio. El único punto a estudiar es *x = 2*.

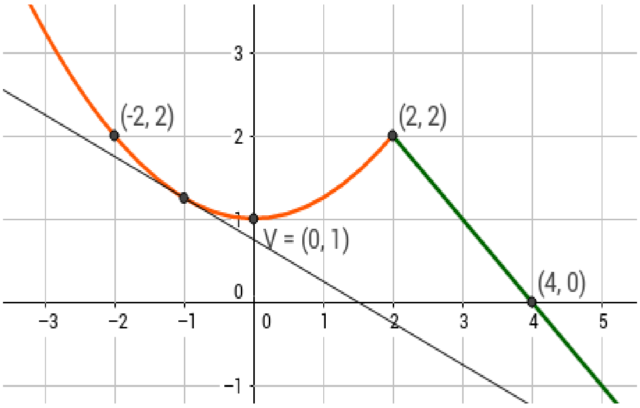
$$\begin{array}{l} f(2) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = \frac{4}{a} + 1 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = -2 + a \end{array}.$$

Para que sea continua: $\frac{4}{a} + 1 = -2 + a$ ; $4 = -3a + a^2$ ; $a = 4$ , $a = -1$ .

Puesto que el enunciado dice *a > 0* nos quedamos con *a = 4*.

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{2}{a}x & , \quad si \quad x<2 \\ -1 & , \quad si \quad x>2\end{cases} \quad ; \quad \begin{array}{l} f'(2^-)=1 \\ f'(2^+)=-1 \end{array}$$ . No sería derivable en *x = 2*.

**A.2.b)** El primer trozo es una parábola con vértice en *(0 , 1)*. El segundo trozo es una recta.




$$t: \quad y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

$$f'(-1)=\frac{-1}{2} \quad ; \quad f(-1)=\frac{5}{4}$$

$$t: \quad y=\frac{-1}{2}(x+1)+\frac{5}{4} \quad ; \quad y=\frac{-1}{2}x+\frac{3}{4}$$

geogebra

EJERCICIO 3
Disponemos de tres monedas: 1 dólar, 1 libra y 1 euro.
La moneda de 1 dólar está trucada y la probabilidad de que salga cara es el doble de la probabilidad de que salga cruz. La moneda de 1 libra también está trucada y tiene dos caras y la de 1 euro es correcta. Se escoge una de las tres monedas al azar y se lanza.
a) **(1.5 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que salga cara?
b) **(1 punto)** Sabiendo que salió cruz, ¿cuál es la probabilidad de que la moneda lanzada fuera la de 1 dólar?

| | D | L | E | |
|---|---|---|---|---|
| C | 2/3 | 2/2 | 1/2 | 13/6 |
| X | 1/3 | 0/2 | 1/2 | 5/6 |
| | 1 | 1 | 1 | 3 |

**A.3.a)** $$p(C)=\frac{\frac{13}{6}}{3}=13/18$$

**A.3.b)** $$p(D/X)=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{6}}=\frac{2}{5}$$

EJERCICIO 4

Para estudiar el número de personas que van al cine mensualmente en una ciudad, se ha seleccionado una muestra aleatoria de 10 meses y se ha registrado el número de entradas al cine vendidas en cada mes. Los datos son los siguientes:

682 553 555 666 657 649 522 568 700 552

a) **(2 puntos)** Suponiendo que el número de entradas vendidas mensualmente sigue una distribución Normal con desviación típica 50 entradas, calcule un intervalo de confianza, con un nivel del 95%, para el número medio de personas que van al cine mensualmente en esa ciudad.

b) **(0.5 puntos)** ¿Cuál es el error máximo que se comete al estimar esta media con este intervalo?

**A.4.a)** Calculamos la media de la muestra:

$$\bar{X}=\frac{682+553+555+666+657+649+522+568+700+552}{10}=610{,}4$$

$$p(z\le z_{\alpha/2})=\frac{1+0{,}95}{2}=0{,}975 \quad ; \quad z_{\alpha/2}=1{,}96$$

geogebra

Intervalo de confianza para la media: $\left(\bar{x}-z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x}+z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=(579{,}41\ ;\ 641{,}39)$

**A.4.b)** $E=z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=30{,}99$

EJERCICIO 1

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 3\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-1\\ -1\end{pmatrix}$.

a) **(1 punto)** Justifique cuáles de las siguientes operaciones se pueden realizar y en dichos casos calcule el resultado: $A\cdot B$ , $B\cdot A$ , $B\cdot C$ y $C^t\cdot B^t$ .

b) **(1.5 puntos)** Calcule la matriz $X$ en la ecuación $A\cdot X+B^t=4C$ .

**B.1.a)** $A_{2\times2}\cdot B_{1\times2}$ No es posible

$B_{1\times2}\cdot A_{2\times2}$ Sí es posible

matriz1 = B A

→ matriz1 = ( −3 6 )

geogebra

$B_{1\times2}\cdot C_{2\times1}$ Sí es posible

matriz2 = B C

→ matriz2 = ( −1 )

$C^t_{1\times2}\cdot B^t_{2\times1}$ Sí es posible

matriz3 = Traspone[C] Traspone[B]

→ matriz3 = ( −1 )

**B.1.b)** $X=A^{-1}(4C-B^t)$ ; matriz4 = 4 C − Traspone [B] D = Inversa [A]

$\rightarrow$ matriz4 $=\begin{pmatrix}-2\\-7\end{pmatrix}$

$\rightarrow$ D $=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 0\\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

X = D matriz4

$\rightarrow$ X $=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\ -\frac{19}{6}\end{pmatrix}$

EJERCICIO 2

Se considera la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{x} & si \quad x\le 2\\ x^2-2x+2 & si \quad x>2\end{cases}$

a) **(1.5 puntos)** Estudie la continuidad y la derivabilidad de esta función.
b) **(1 punto)** Estudie su monotonía y su curvatura para $x>0$.

**B.2.a)** El primer trozo es una racional. Es continua y derivable en su dominio: (−∞ , 2) − {0}

En $x = 0$ tiene una discontinuidad de salto infinito, puesto que $\lim_{x\to 0} f=\pm\infty$

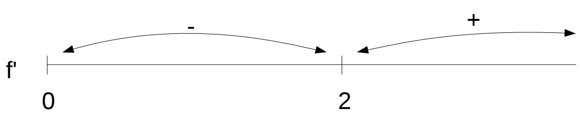
El segundo trozo es una polinómica. Es continua y derivable en su dominio: (2 , −∞)

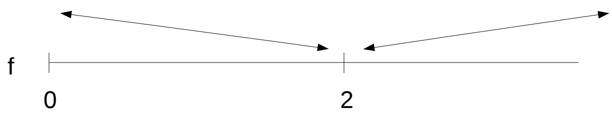
Hay que estudiar por separado $x = 2$ :

$$\left.\begin{array}{l} f(2)=\lim_{x\to 2^-} f(x)=2\\ \lim_{x\to 2^+} f(x)=2\end{array}\right.$$ ; es continua en $x = 2$

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-4}{x^2}, & si \quad x<2\\ 2x-2, & si \quad x>2\end{cases} \quad ; \quad \begin{array}{l} f'(2^-)=-1\\ f'(2^+)=2\end{array}$$ ; no es derivable en $x = 2$

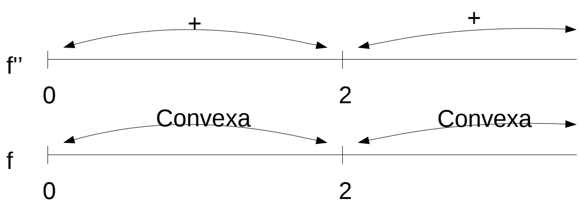
**B.2.b)**




La función es decreciente en (0 , 2) y creciente en (2, +∞). Tiene un mínimo en (2 , 2)

$$f''(x)=\begin{cases}\dfrac{8}{x^3}, & si \quad x<2\\ 2, & si \quad x>2\end{cases}$$




La función es convexa en (0, +∞).

## EJERCICIO 3

De los alumnos que se presentaron a las pruebas de selectividad de una provincia, 1150 se examinaron de Geografía; de estos, 598 eligieron la opción A. Se sabe que aprobaron esa asignatura el 78% de los que eligieron la opción A y el 74% de los que eligieron la opción B. Se ha escogido al azar uno de los alumnos que se examinaron de Geografía.

a) **(1.5 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que este alumno haya aprobado esta asignatura?

b) **(1 punto)** Si se sabe que este alumno ha aprobado Geografía, ¿cuál es la probabilidad de que haya elegido la opción A?

| | Ap | Ap' | |
|---|---|---|---|
| A | 466.44 | 131.56 | 598 |
| B | 408.48 | 143.52 | 552 |
| | 874.92 | 275.08 | 1150 |

$78\,\%\,de\,598=466{,}44 \quad ; \quad 74\,\%\,de\,552=408{,}48$

**B.3.a)** $p(A)=\dfrac{874{,}92}{1150}=0.76$

**B.3.b)** $p(A/Ap)=\dfrac{466{,}44}{874{,}92}=0{,}53$

*geogebra*

## EJERCICIO 4

**(2.5 puntos)** La proporción de nacimientos que ocurren con luna llena en los hospitales de una ciudad se consideraba no inferior a 0.45, pero un estudio afirma que en la actualidad esta proporción ha descendido. Para contrastar esta hipótesis se han elegido al azar, en estos hospitales, a 200 recién nacidos, de los cuales 70 nacieron con luna llena. Decida mediante un contraste de hipótesis, con $H_0: p \geq 0.45$, si la afirmación del estudio es correcta con un nivel de significación del 1%, indicando la región de rechazo.

**B.4)** Contraste de hipótesis unilateral sobre la proporción.

$H_0: p \geq 0{,}45$ El estudio no tiene razón, la proporción sigue siendo mayor; $H_1: p < 0{,}45$

$p(z<z_\alpha)=0{,}99 \quad ; \quad z_\alpha=2{,}325$

Región de aceptación: $\left(p-z_\alpha\cdot\sqrt{\dfrac{p\cdot(1-p)}{n}}\ ,+\infty\right)=(0{,}3682\ ;+\infty)$

Región de rechazo: $(-\infty, 0{,}3682)$

*geogebra*

Proporción de la muestra del estudio: $\dfrac{70}{200}=0{,}35$ .

Se rechaza la hipótesis nula. Con este nivel de aceptación podemos afirmar que la proporción de nacimientos ha descendido.