Paco Muñoz. IES Virgen de la Cabeza – Marmolejo (Jaén)

A.1) Como la función es continua, también lo es en $x = 0$, por tanto:

$f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)=b$. Calculamos el límite:

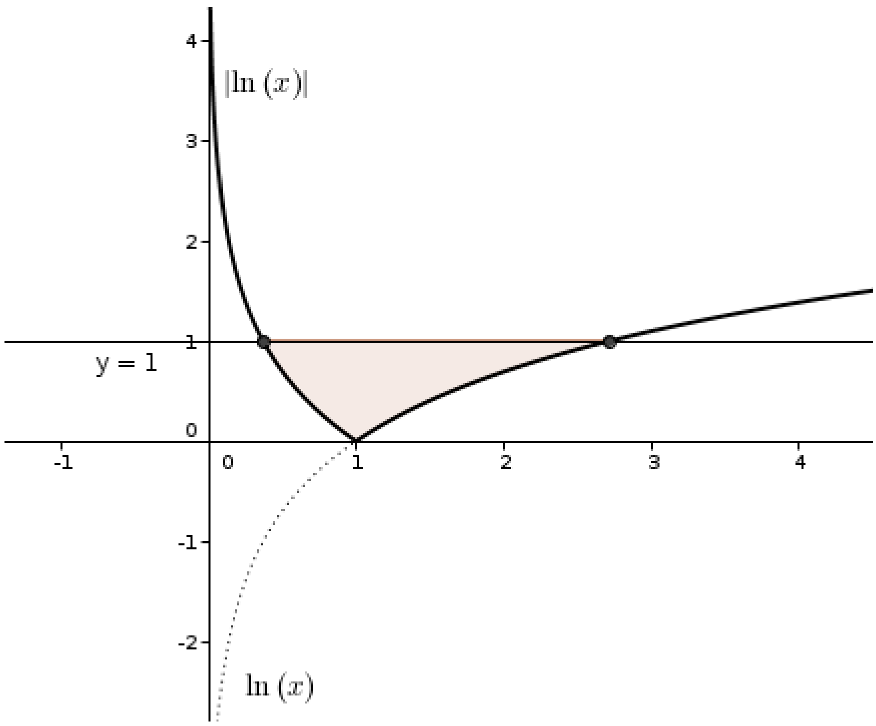
$\lim_{x\to 0} \frac{x+cosx-a e^x}{x^2}=\left(\frac{1-a}{0}\right)$. Este límite debe ser finito, por lo que debe ser $a = 1$.

Resolvemos el límite usando L'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-senx-a e^x}{2x}=\left(\frac{1-a}{0}\right)=(\text{L'Hopital})=\lim_{x\to 0} \frac{-cosx-a e^x}{2}=\frac{-1-a}{2}=-1$$

Para que la función sea continua, se debe cumplir $b = -1$.

A.2.a)



A.2.b) $f(x)=\begin{cases} -\ln x \;, & si \;\; 0<x<1 \\ \ln x \;, & si \;\; x\geq 1 \end{cases}$. Se iguala a 1 cada una de las ramas:

$\begin{cases} -\ln x=1 \;\; ; \;\; x=e^{-1} \\ \ln x=1 \;\; ; \;\; x=e \end{cases}$. Los puntos son $(e^{-1}, 1)$ y $(e, 1)$

A.2.c) Necesitamos hacer

$$\int \ln x\, dx=\left[\begin{array}{l} u=lnx \;\; ; \;\; du=\frac{dx}{x} \\ dv=dx \;\; ; \;\; v=x \end{array}\right]=x\cdot lnx-\int dx=x\cdot lnx-x+K$$

El área es: $\int_{e^{-1}}^{1} (1+lnx)dx+\int_{1}^{e} (1-lnx)dx=[x+x\cdot lnx-x]_{e^{-1}}^{1}+[x-x\cdot lnx+x]_{1}^{e}=$

$=e^{-1}+(e-2)=1{,}09\,u^2$

A.3.a) Veamos cuándo el rango no es 3:

$|A| = -m^3 + 2m^2 - m = 0 \quad ; \quad m=1 \ , \ m=0$

Si $m = 1$: $\begin{vmatrix} 1 & m \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$. En este caso $r(A) = 2$.

Si $m = 0$: $\begin{vmatrix} 1 & m \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$. En este caso $r(A) = 2$.

Para cualquier otro valor de m , el rango es 3.

A.3.b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad A^{2015} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

A.4.a) Se calcula el ángulo que forman sus vectores normales:

$\vec{n} = (1,3,2) \ ; \ \vec{n}' = (-2,1,3) \quad ; \quad \cos(\widehat{\vec{n},\vec{n}'}) = \frac{\vec{n} \cdot \vec{n}'}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}|'} = \frac{1}{2}$. El ángulo es de *60º*.

A.4.b) Calculamos los puntos de corte del plano con los ejes coordenados:

Eje X : $y=0 \ , \ z=0 \quad \rightarrow A(5,0,0)$

Eje Y : $x=0 \ , \ z=0 \quad \rightarrow B(0,\frac{5}{3},0)$

Eje Z : $x=0 \ , \ y=0 \quad \rightarrow C(0,0,\frac{5}{2})$

El cuarto vértice del tetraedro sería el origen: O(0,0,0). El volumen del tetraedro es:

$$V = \frac{1}{6}[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}] = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{vmatrix} = \frac{125}{36} u^3$$

B.1.a) Asíntotas horizontales:

$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x+1}{e^x}=0$. (Hay que hacer L'Hopital dos veces) . Hay asíntota horizontal en $y = 0$, por $+\infty$.

$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+3x+1}{e^x}=+\infty$. No hay asíntota horizontal por $-\infty$.

Asíntotas oblicuas:

$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+3x+1}{x\cdot e^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+3+\frac{1}{x}}{e^x}=-\infty$. No hay asíntota oblicua.

Asíntotas verticales:

No hay, ya que no hay ningún valor que anule el denominador, y el dominio es $\mathbb{R}$.

B.1.b) Serán los puntos en los que la derivada valga 0:

$f'(x)=(-x^2-x+2)\cdot e^{-x}$; $f'(x)=0$; $x=1$, $x=-2$. Puntos: $\left(1,\frac{5}{e}\right)$, $\left(-2,-e^2\right)$

B.1.c) $f(0)=1$; $f'(0)=2$; $t:\ y=2x+1$

B.2) $I=\int e^{2x}\,senx\,dx=\left[\begin{array}{l} u=e^{2x}\ ;\ du=2e^{2x}dx \\ dv=senx\,dx\ ;\ v=-cosx\end{array}\right]=-e^{2x}cosx+2\int e^{2x}cosx\,dx=$

$=\left[\begin{array}{l} u=e^{2x}\ ;\ du=2e^{2x}dx \\ dv=cosx\,dx\ ;\ v=senx\end{array}\right]=-e^{2x}cosx+2\left(e^{2x}senx-2\int e^{2x}senx\,dx\right)=e^{2x}(2\,senx-cosx)-4I$

Se despeja I:

$I=e^{2x}(2\,senx-cosx)-4I$; $I=\frac{e^{2x}(2\,senx-cosx)}{5}+K$

B.3.a) Estudiamos la matriz del sistema:

En la primera y tercera ecuación tenemos un menor de orden 2 distinto de 0:

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Por tanto $r(A) \geq 2$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 2 & \alpha & 0 \\ 3 & 1 & \alpha+4 \end{vmatrix} = 6\alpha - 2\alpha^2 = 0 \quad ; \quad \alpha = 0 \ , \ \alpha = 3$

Estudiamos la matriz ampliada en esos dos casos:

$\alpha = 0 \quad \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad . \quad \alpha = 3 \quad \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 7 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$

Conclusión:

Si $\alpha \neq 0$ y 3 , $r(A) = r(\bar{A}) = 3$ → Sistema compatible determinado

Si $\alpha = 0$ ó 3 , $r(A) = r(\bar{A}) = 2$ → Sistema compatible indeterminado

B.3.b) $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & 0 \\ 7 & 1 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}} = \dfrac{8}{4} = 2 \quad ; \quad y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 0 \\ 3 & 7 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}} = 1 \quad ; \quad z = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}} = 0$

B.4.a) Usaremos un punto *A* de la recta y su vector director:

$r: \begin{cases} A(5, -1, 0) \\ \vec{u} = (6, -3, 2) \end{cases}$.

El plano lo obtenemos con el punto P y los vectores $\overrightarrow{AP}$ y $\vec{u}$:

$\pi: \begin{cases} P(1,\ 6,\ -2) \\ \overrightarrow{AP} = (-4,\ 7,\ -2) \\ \vec{u} = (6,\ -3,\ 2) \end{cases} \qquad \pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-6 & z+2 \\ -4 & 7 & -2 \\ 6 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0$

$$\pi: 8x - 4y - 30z - 44 = 0$$

B.4.b) $d(P, r) = \dfrac{|\overrightarrow{AP} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|} = \dfrac{|(8, -4, -30)|}{|\vec{u}|} = \dfrac{\sqrt{980}}{\sqrt{49}} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}u$