SOLUCIONES

Prueba de Acceso a la Universidad. Universidades de Andalucía **Matemáticas II**

Examen Reserva 2. Año 2015

Paco Muñoz. IES Virgen de la Cabeza – Marmolejo (Jaén)

A.1.a) Asíntotas horizontales:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) =$ (L'Hopital) $= \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$. No tiene asíntota

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$. Tiene asíntota horizontal en *y = 0*.

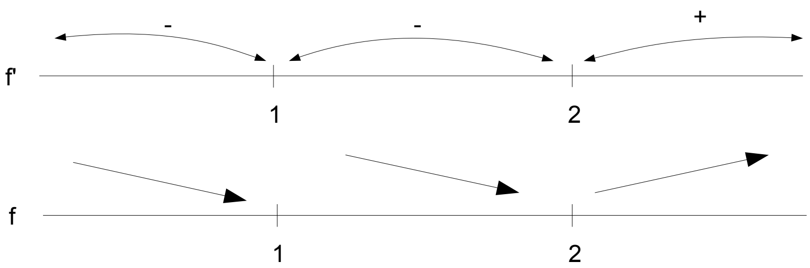
Asíntota oblicua:

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2 - x} =$ (L'Hopital) $= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2x-1} =$ (L'Hopital) $= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$. No tiene.

Asíntota vertical:

$\lim_{x \to 1} f(x) = \pm\infty$. $\begin{cases} \lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \end{cases}$. Asíntota vertical en *x = 1*.

A.1.b) $f'(x) = \frac{e^x (x-2)}{(x-1)^2}$; $f'(x) = 0$; $x = 2$



Creciente en $(2, +\infty)$

Decreciente en $(-\infty, 1)$ y en $(1, 2)$

Mínimo relativo en *x = 2* , *y = e²*.

A.2.a) $F'(e) = f(e) = \frac{1}{2e}$

A.2.b) Necesitamos saber *F(e)*:

$$F(x) = \int \frac{lnx}{2x} dx = \left[t = lnx \ ; \ dt = \frac{dx}{x} \right] = \frac{1}{2} \int t \, dt = \frac{1}{4} t^2 = \frac{1}{4} (lnx)^2 + K$$

$$F(1) = 2 \ \rightarrow \ 2 = K \ \rightarrow \ F(x) = \frac{1}{4} (lnx)^2 + 2$$

$$F(e) = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}$$

Recta tangente: $t: \quad y = \frac{1}{2e}(x - e) + \frac{9}{4} \quad ; \quad y = \frac{1}{2e} x + \frac{7}{4}$

A.3.a) Matriz del sistema:

Hacemos un menor de orden 2: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \quad \rightarrow r(A) \geq 2$.

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3+\alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 + 6\alpha + 8 \quad ; \quad |A| = 0 \rightarrow \alpha = -4 \ , -2$$

Si $\alpha \neq -4 \, y -2$, $r(A) = r(\bar{A}) = n = 3$. El sistema tiene solución única.

A.3.b) Matriz ampliada:

$\alpha = -4 \quad ; \quad \begin{vmatrix} -4 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$. En este caso el sistema es incompatible.

$\alpha = -2 \quad ; \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$. En este caso el sistema es compatible indeterminado. Tiene infinitas soluciones.

Resolvemos usando la 2ª y 3ª ecuaciones y dando a *z* valor paramétrico:

$$\left. \begin{array}{r} x + y = -2 + 2t \\ -x + 2y = 2 - t \end{array} \right\} \quad x = \frac{\begin{vmatrix} -2+2t & 1 \\ 2-t & 2 \end{vmatrix}}{3} = \frac{-6+5t}{3} = -2 + \frac{5}{3}t \quad ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2+2t \\ -1 & 2-t \end{vmatrix}}{3} = \frac{t}{3} \quad ; \quad z = t$$

A.4) Calculamos un plano perpendicular a *s* que pase por *P*. Para ello usamos el vector director de *s* como normal al plano:

$\vec{v} = (5, -3, 4) \quad ; \quad \pi: 5x - 3y + 4z + D = 0$

Como $P \in \pi \quad \rightarrow \quad 5 \cdot 3 - 3 \cdot (-5) + 4 \cdot 4 + D = 0 \quad \rightarrow \quad D = -46$. $\pi: 5x - 3y + 4z - 46 = 0$

Calculamos el punto de corte de *s* con π:

Punto genérico de *s*: $A(4+5t, 8-3t, 4t)$. Se sustituye en π y se obtiene *t = 1*.

A(9, 5, 4).

La recta *r* pedida es la que une *P* con *A*:

$$\overrightarrow{PA} = (6, 10, 0) \quad ; \quad r: \begin{cases} x = 3 + 6\lambda \\ y = -5 + 10\lambda \\ z = 4 \end{cases}$$

B.1) Dato: $4x+y=60$; $y=60-4x$

Función a maximizar: $V=x^2 y$; $f(x)=x^2(60-4x)=60x^2-4x^3$

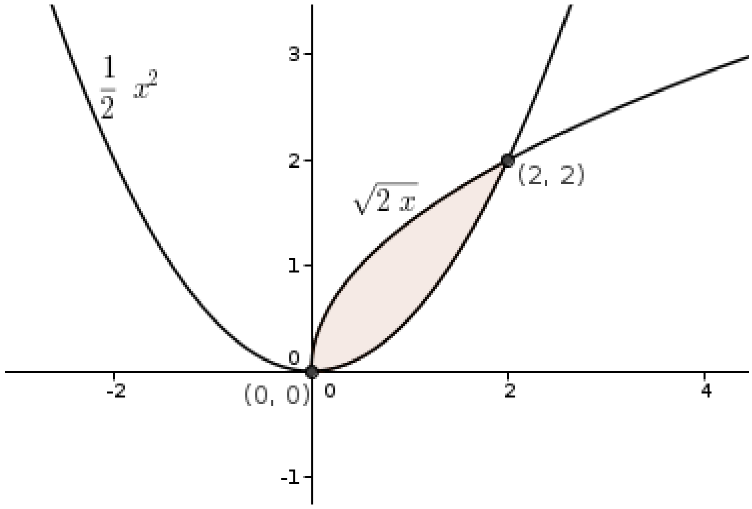
$f'(x)=120x-12x^2$; $f'=0 \rightarrow x=10$

$f''(x)=120-24x$; $f''(10)<0 \rightarrow x=10$ es un máximo

Las dimensiones de la caja deben ser 10 cm en la base, 20 cm en la altura.

B.2.a) Puntos de corte: $\sqrt{2x}=\frac{1}{2}x^2$; $2x=\frac{1}{4}x^4$; $8x=x^4$; $x^4-8x=0$; $x=0,\ x=2$

Puntos (0 , 0) y (2 , 2)



B.2.b) $\int_0^2 \left(\sqrt{2x}-\frac{1}{2}x^2\right)dx=\left[\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{x^3}-\frac{x^3}{6}\right]_0^2=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}u^2$

B.3.a) $X^2 A X=B$; $|X|^2\cdot|A|\cdot|X|=|B|$; $|X|=\sqrt[3]{\frac{|B|}{|A|}}=\sqrt[3]{\frac{8}{-1}}=-2$

B.3.b) $Y=(A^2)^{-1}\cdot A\cdot B=A^{-2}\cdot A\cdot B=A^{-1}\cdot B$

$A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$; $Y=A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 0 & -2\end{pmatrix}$

B.4.a) Punto genérico de *r*: $A(-2+3t,-1+4t,t)$

$d(O,A)=d(P,A)$; $\sqrt{(-2+3t)^2+(-1+4t)^2+t^2}=\sqrt{(-6+3t)^2+(1+4t)^2+(-2+t)^2}$

Se resuelve la ecuación y se obtiene: $t=3$; $A(7,\ 11,\ 3)$

B.4.b) Es el punto que da la distancia del origen a la recta. Hacemos un plano perpendicular a la recta que pase por el origen y calculamos el punto de corte de ese plano con la recta.

Vector director de la recta: $\vec{v}=(3,4,1)$. Este vector es normal al plano: $\pi:3x+4y+z+D=0$

Como el plano pasa por O: $\rightarrow D=0$; $\pi=3x+4y+z=0$

Punto de corte del plano con la recta:

Punto genérico de *r*: $B(-2+3t,-1+4t,t)$;

$3(-2+3t)+4(-1+4t)+t=0$; $t=\frac{5}{13}$; $B(\frac{-11}{13},\frac{7}{13},\frac{5}{13})$