SOLUCIONES
Prueba de Acceso a la Universidad. Universidades de Andalucía **Matemáticas II**
Examen Reserva 1. Año 2015

Paco Muñoz. IES Virgen de la Cabeza – Marmolejo (Jaén)

A.1) Extremo local en *x = 0*: $f'(x)=3ax^2+2bx+c \quad ; \quad f'(0)=0 \quad ; \quad c=0$

Punto de inflexión en *x = 1*: $f''(x)=6ax+2b \quad ; \quad f''(1)=0 \quad ; \quad 6a+2b=0$

Punto en *(1 , 0)*: $f(1)=0 \quad ; \quad a+b+c+d=0 \quad ; \quad a+b+d=0$

Pendiente en *x = 1* es *-3*: $f'(1)=-3 \quad ; \quad 3a+2b=-3$.

Se resuelven las ecuaciones y se obtiene: a = 1 ; b = -3 ; d = 2

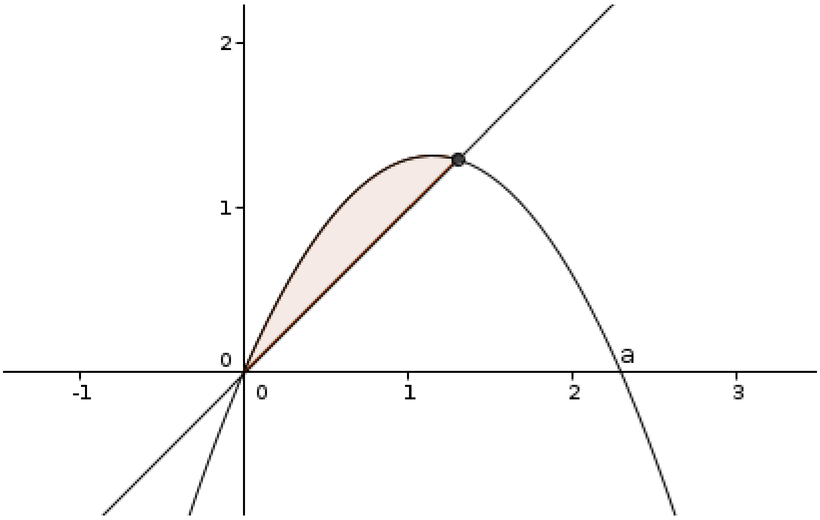
$$f(x)=x^3-3x^2+2$$

A.2) Cortes con los ejes de la parábola: *x = 0* ; *x = a*.

Cortes entre la parábola y la recta:

$-x^2+ax=x \quad ; \quad -x^2+ax-x=0 \quad ; \quad x(-x+a-1)=0 \quad ; \quad x=0 \ , \ x=a-1$

Gráfica:



Según el enunciado:

$$\frac{-(a-1)^3}{3}+\frac{a(a-1)^2}{2}-\frac{(a-1)^2}{2}=\frac{4}{3}$$

Se quitan denominadores con el mcm, y se desarrollan los paréntesis:

$a^3-3a^2+3a-9=0.$ Se resuelve por Ruffini: $a=3$

A.3.a) Es un sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas. Debe cumplirse que *r(A) = 3*: $|A|\neq 0$

$$\begin{vmatrix} \alpha & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & \alpha \end{vmatrix}=\alpha^2-8\alpha+15=0 \quad ; \quad \alpha=3 \ , \ \alpha=5 \ .$$

Si $\alpha\neq 3 \ y \ 5$, el sistema tiene solución única.

A.3.b) Tomamos el menor de orden 2: $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$. Por tanto:

Si $\alpha=3$ *ó* $\alpha=5 \rightarrow r(A)=2$.

Hacemos el rango de la ampliada:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & \alpha-2 \\ 4 & \alpha & 3 \end{vmatrix} = -2\alpha^2+\alpha+15 \quad ; \quad -2\alpha^2+\alpha+15=0 \quad ; \quad \alpha=3 \ , \ \alpha=\frac{-5}{2}$$

Si $\alpha=3 \rightarrow r(\bar{A})=2 \ ; \ n=3$. Sistema compatible determinado, infinitas soluciones.

Si $\alpha=5 \rightarrow r(\bar{A})=3$. Sistema incompatible, sin solución.

A.3.c) Si $\alpha=3 \rightarrow r(\bar{A})=2 \ ; \ n=3$. Sistema compatible determinado, infinitas soluciones.

Resolvemos el sistema: nos quedamos con las dos primeras ecuaciones y damos a *x* valor paramétrico *t*:

$$\left.\begin{array}{r} 2y-z=-1-3t \\ y+2z=1 \end{array}\right\} \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} -1-3t & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{5}=\frac{-1}{5}-\frac{6}{5}t \quad ; \quad z=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -1-3t \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{5}=\frac{3}{5}+\frac{3}{5}t$$

A.4.a) $\overrightarrow{BC}=(8,-3,5)$, $\overrightarrow{BD}=(4,-2,2)$

$$\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 8 & -3 & 5 \\ 4 & -2 & 2 \end{vmatrix}=(4,\ 4,\ -4) \ .$$

Área del triángulo: $\dfrac{|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}|}{2}=2\sqrt{3}\,u^2$

A.4.b) *A* es un punto genérico de *r*: $r:\begin{cases} x=-1-\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$. $A(-1-\lambda,\lambda,\lambda)$

Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son perpendiculares: $(2+\lambda,2-\lambda,-3-\lambda)\cdot(10+\lambda,-1-\lambda,2-\lambda)=0$

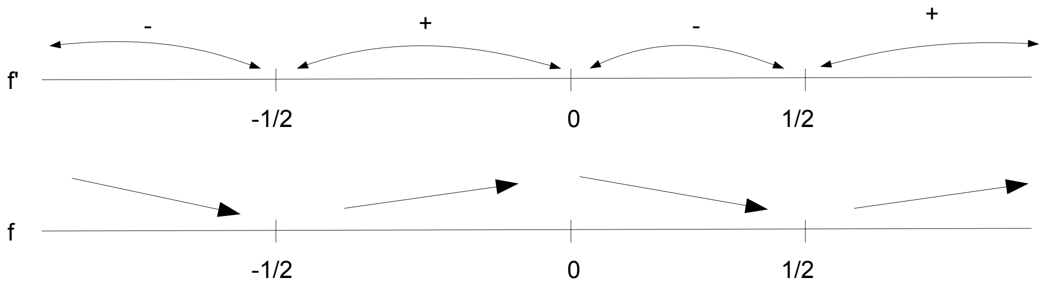
$3\lambda^2+12\lambda+12=0 \quad ; \quad \lambda=-2$. *A(1 , -2 , -2).*

B.1.a) $f(x)=\begin{cases} x^2-x \ , & si \ \ x\geq 0 \\ x^2+x \ , & si \ \ x<0 \end{cases}$ La función es continua y derivable en $\mathbb{R}-\{0\}$ ya que son dos trozos de funciones polinómicas. Estudiemos en *x = 0*.

Continuidad: $f(0)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=0$. La función es continua en *x = 0*.
$\lim_{x\to 0^-} f(x)=0$

Derivabilidad: $f'(x)=\begin{cases} 2x-1 \ , & si \ \ x>0 \\ 2x+1 \ , & si \ \ x<0 \end{cases}$. $\begin{matrix} f'(0^+)=-1 \\ f'(0^-)=1 \end{matrix}$. No es derivable en *x = 0*.

B.1.b) $f'(x)=0 \quad ; \quad \begin{cases} 2x-1=0 \ , & si \ \ x=\dfrac{1}{2} \\ 2x+1=0 \ , & si \ \ x=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$



La función es creciente en $\left(\dfrac{-1}{2},0\right)$ y en $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

La función es decreciente en $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)$ y en $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$.

B.1.c) $x=\dfrac{-1}{2} \ , \ y=\dfrac{-1}{4}$ es un mínimo relativo

$x=\dfrac{1}{2} \ , \ y=\dfrac{-1}{4}$ es un mínimo relativo

$x=0 \ , \ y=0$ es un máximo relativo

B.2.a) Para la recta tangente necesitamos el punto y la derivada en *x = 2*:

$F'(2)=f(2)=\dfrac{5}{4}$. La recta tangente es: $t: \quad y=\dfrac{5}{4}(x-2)+\ln 2$.

B.2.b) Hay que hacer una integral racional:

$$\frac{x^2+1}{x^2(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1} \quad ; \quad x^2+1=Ax(x-1)+B(x-1)+Cx^2$$

Se dan valores a *x* y se obtiene: *B = -1* , *C = 2* , *A = -1*.

$$\int \frac{x^2+1}{x^2(x-1)}\,dx = -\int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{1}{x^2}\,dx + 2\int \frac{1}{x-1}\,dx = -\ln|x| + \frac{1}{x} + 2\ln|x-1| + K$$

Como *F(2) = ln 2* : $\ln 2 = -\ln 2 + \frac{1}{2} + 2\ln 1 + K$; $K = 2\ln 2 - \frac{1}{2}$.

Por tanto; $F(x) = -\ln|x| + \frac{1}{x} + 2\ln|x-1| + 2\ln 2 - \frac{1}{2}$

B.3.a) $X = A^{-1}(I+B)$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & \frac{-5}{2} & \frac{1}{2} \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad . \quad X = \begin{pmatrix} -2 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & -4 & 1 \\ -1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

B.3.b) $\left|(A^2 \cdot B^{-1})^{2015}\right| = \left(|A|^2 \cdot \frac{1}{|B|}\right)^{2015} = \left(4 \cdot \frac{1}{4}\right)^{2015} = 1$

B.4.a) Necesitamos la ecuación paramétrica de la recta: $r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 \end{cases}$. $A(0,0,1)$; $\vec{v} = (1,-1,0)$

$$d(P,r) = \frac{|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|} \quad . \quad \overrightarrow{AP} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (2,\ 2,\ 1) \quad . \quad d(P,r) = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}\,u$$

B.4.b) El vector normal al plano es $\vec{n} = \overrightarrow{AP} \times \vec{v} = (2,\ 2,\ 1)$.

$\pi: 2x + 2y + z + D = 0$. Hacemos que pase por *P*:

$p: 2 + 0 - 1 + D = 0$; $D = -1$. $\pi: 2x + 2y + z - 1 = 0$