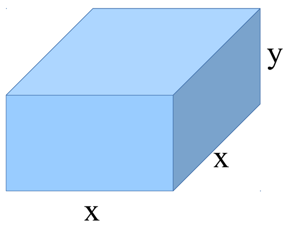
Paco Muñoz. IES Virgen de la Cabeza – Marmolejo (Jaén)

A.1)

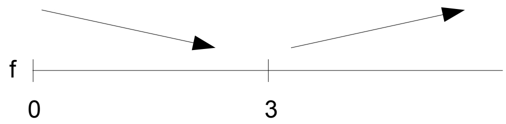


Se sabe el volumen: $x^2 \cdot y = 13{,}5 \rightarrow y = 13{,}5/x^2$

La función a minimizar es el área de las paredes y el fondo:

$$S = 4xy + x^2 \rightarrow f(x) = 4x\frac{13{,}5}{x^2} + x^2 = \frac{54}{x} + x^2$$

$f'(x) = \frac{-54}{x^2} + 2x$; $f'(x) = 0$; $x = 3$



Tenemos un mínimo para la chapa haciendo la base de 3x3 m y la altura de 1,5 m.

A.2) $\int \frac{-x^2}{x^2+x-2}$. Es una integral racional. Lo primero es hacer la división y se obtiene:

$\int \frac{-x^2}{x^2+x-2}dx = \int -1\,dx + \int \frac{x-2}{x^2+x-2}dx = -x + I_1$. Descomponemos la fracción en I_1:

Se descompone el denominador: $x^2+x-2 = (x+2)(x-1)$

Se descompone la fracción: $\frac{x-2}{x^2+x-2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1}$; $x-2 = A(x-1) + B(x+2)$

Se da valores a x y se obtiene: $A = \frac{4}{3}$; $B = \frac{-1}{3}$.

Ya podemos hacer $I_1 = \frac{4}{3}\ln|x+2| - \frac{1}{3}\ln|x-1|$

$$\int \frac{-x^2}{x^2+x-2} = -x + \frac{4}{3}\ln|x+2| - \frac{1}{3}\ln|x-1| + K$$

A.3.a) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ \lambda & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$; $|A| = 0$. El determinante siempre vale 0, para cualquier valor de λ; el rango nunca es 3. Puede ser 2 ó 1.

Tomamos un menor de orden 2: $\begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda = 0$.

Tomamos otro: $\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda = 1$.

Con esto tenemos que siempre hay un menor de orden 2 que es distinto de 0. Por tanto el rango de la matriz A es siempre 2.

Veamos la ampliada: $\begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ \lambda & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\lambda^2 \quad ; \quad \lambda = 0$. Si $\lambda = 0$ el rango es 2. Si no es 3.

Conclusión: Si $\lambda \neq 0$; rang(A) = 2 ; rang($\overline{\text{A}}$) = 3 ; Sistema incompatible.

Si $\lambda = 0$; rang(A) = 2 ; rang($\overline{\text{A}}$) = 2 ; n = 3 ; Sistema compatible indeterminado.

A.3.b) El sistema queda: $\left.\begin{array}{r} y-z=-1 \\ x+y=0 \end{array}\right\}$. Damos valor paramétrico a z y despejamos las otras. Se obtiene: $z=t \;\; ; \;\; y=-1+t \;\; ; \;\; x=1-t$

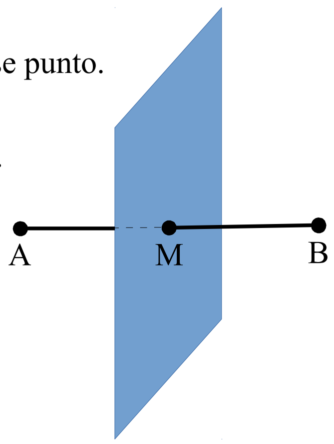
A.4.a) Los vectores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ deben tener rango 2: $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & m-1 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad m=3$

A.4.b) $\overrightarrow{AB} = (2,\ 0\ ,2)$. Este será el vector normal del plano pedido.

Punto medio del segmento $\overline{AB}$: $M(1,\ 0,\ 2)$. El plano contiene a ese punto.

$\Pi: 2x+2z+D=0$; Se sustituye el punto M y se obtiene $D=-6$.

La solución es: $\Pi: 2x+2z-6=0$



A.4.c) $S = \dfrac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \dfrac{\sqrt{8}}{2} = \sqrt{2}\ ud^2$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-2,\ 0,\ 2)$$

B.1) $\lim_{x\to 0}\dfrac{ax^2+bx+1-\cos x}{sen\, x^2}=\left(\dfrac{0}{0}(L'Hopital)\right)=\lim_{x\to 0}\dfrac{2ax+b+sen\, x}{\cos x^2\cdot 2x}=\left(\dfrac{b}{0}\right)$. Como se sabe que el límite es finito, debe ser ***b = 0***. Y entonces podemos volver a aplicar L'Hopital:

$\lim_{x\to 0}\dfrac{2a+\cos x}{sen\, x^2\cdot 2x\cdot 2x+\cos x^2\cdot 2}=\dfrac{2a+1}{2}$. Se iguala a 1 y se obtiene $\boldsymbol{a=\dfrac{1}{2}}$

B.2) Del punto P se obtienen dos datos: *f(1) = 2* y *f'(1) = 0*. Hay que hacer la integral dos veces para llegar a *f* :

$$f'(x)=\int \ln x\, dx=\begin{bmatrix} u=\ln x \;\; ; \;\; du=\dfrac{1}{x}dx \\ dv=dx \;\; ; \;\; v=x \end{bmatrix}=\ln x\cdot x-\int dx=x\cdot ln\, x-x+K_1 \;\; ;$$

$$f'(1)=0 \;\rightarrow\; -1+K_1=0 \;\rightarrow\; K_1=1$$

$$f(x)=\int (x\ln x-x+1)\,dx=\begin{bmatrix} u=\ln x \;\; ; \;\; du=\dfrac{1}{x}dx \\ dv=x\,dx \;\; ; \;\; v=\dfrac{x^2}{2} \end{bmatrix}=\left[\ln x\cdot\dfrac{x^2}{2}-\int\dfrac{x}{2}dx\right]-\dfrac{x^2}{2}+x=\dfrac{x^2}{2}\cdot\ln x-\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{x^2}{2}+x+K_2$$

$$f(1)=2 \;\rightarrow\; -\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}+1+K_2=2 \;\rightarrow\; K_2=\dfrac{7}{4} \;\; ;$$

$$f(x)=\dfrac{x^2}{2}\cdot\ln x-\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{x^2}{2}+x+\dfrac{7}{4}=\dfrac{2x^2\cdot\ln x-3x^2+4x+7}{4}$$

B.3.a) Matriz A: $|A|=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & m\end{vmatrix}=-m-4$. Si m = -4 , rang(A) = 1. Si $m \neq -4$, rang(A) = 2.

Matriz B: Tenemos un menor de orden 2 distinto de 0 : $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{vmatrix}\neq 0$. Por tanto rang(B) ≥ 2

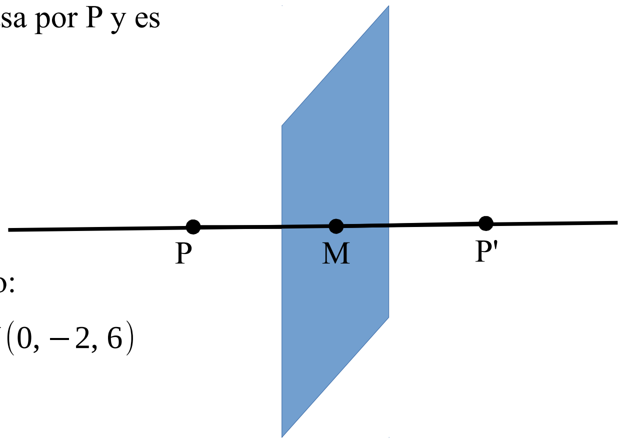
$$|B|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ -2 & m & 0\\ 3 & 2 & m\end{vmatrix}=m^2+4m \;\; ;$$

$m^2+4m=0 \;\; ; \;\; m=0 \;\; , \;\; m=-4$. Si m = 0 ó -4 , rang(B) = 2. Si m ≠ 0 y -4 , rang(B) = 3.

Las dos matrices tienen el mismo rango (que es 2) cuando ***m = 0***.

B.3.b) $-m-4=m^2+4m \;\; ; \;\; m=-4 \;\; , \;\; m=-1$

B.4.a) Con el vector normal de π hacemos una recta que pasa por P y es perpendicular a π:



$$\vec{n}=(2,1,-1) \quad ; \quad s:\begin{cases} x=2+2\lambda \\ y=-1+\lambda \\ z=5-\lambda \end{cases}$$

Hacemos el punto de corte (M) de esa recta con el plano:

$$2(2+2\lambda)+(-1+\lambda)-(5-\lambda)+8=0 \quad ; \quad \lambda=-1 \quad ; \quad M(0,-2,6)$$

M es el punto medio entre P y P': $P'(p_1, p_2, p_3)$

$$\frac{2+p_1}{2}=0 \;,\; p_1=-2 \quad ; \quad \frac{-1+p_2}{2}=-2 \;,\; p_2=-3 \quad ; \quad \frac{5+p_3}{2}=6 \;,\; p_3=7 \quad ; \quad P'(-2,-3,7)$$

B.4.b) En la ecuación de *r* se observa que el punto P del apartado anterior pertenece a esta recta. Ya tenemos su simétrico.

Hacemos también el punto de corte de *r* con π: (Q)

$$r:\begin{cases} x=2-2\lambda \\ y=-1+3\lambda \\ z=5+\lambda \end{cases} \quad ;$$

$$2(2-2\lambda)+(-1+3\lambda)-(5+\lambda)+8=0 \quad ; \quad \lambda=3 \quad ;$$

$$Q(-4,8,8)$$

La recta pedida (r') es la que pasa por P' y por Q:

$$\overrightarrow{P'Q}=(-2,11,1) \quad ; \quad r':\begin{cases} x=-2-2\lambda \\ y=-3+11\lambda \\ z=7+\lambda \end{cases}$$