SOLUCIONES
Prueba de Acceso a la Universidad. Universidades de Andalucía **Matemáticas II**
Examen Septiembre. Año 2014

Paco Muñoz. IES Virgen de la Cabeza – Marmolejo (Jaén)

A.1) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos 3x - e^x + ax}{x \cdot senx} = \left(\frac{0}{0}\right)$. Aplicamos L'Hopital: $\lim_{x\to 0} \frac{-3 sen 3x - e^x + a}{senx + x \cdot cosx} = \left(\frac{-1+a}{0}\right)$

Para que el resultado del límite no sea $\pm\infty$, debe ser una indeterminación *(0/0),* o sea, $a = 1$.

Así tenemos *(0/0)* y podemos aplicar de nuevo L'Hopital: $\lim_{x\to 0} \frac{-9\cos 3x - e^x}{cosx + cosx - x \cdot senx} = \frac{-10}{2} = -5$

A.2) Tenemos una integral racional. Se hace la división y se obtiene: $\frac{x^2}{2x^2-2x-4} = \frac{1}{2} + \frac{x+2}{2x^2-2x-4}$.

Ahora descomponemos la segunda fracción: $\frac{x+2}{2x^2-2x-4} = \frac{A}{2x+2} + \frac{B}{x-2} = \frac{-1/3}{2x+2} + \frac{2/3}{x-2}$

$$\int_0^1 \frac{x^2}{2x^2-2x-4}dx = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{6}\ln|2x+2| + \frac{2}{3}\ln|x-2|\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{\ln 4}{6} - \frac{\ln 2}{2} = \frac{3-5\ln 2}{6}$$

A.3.a) Para que sea compatible determinado, debe ser r(A) = 3, o sea |A| $\neq$ 0

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & m \\ m & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2m \end{vmatrix} = 2m^2 + 4m = 0 \Leftrightarrow m = 0 \text{ ó } m = -2 \quad .$$

El sistema tiene solución única si *m* es distinto de esos dos valores.

A.3.b) Si el sistema tiene una única solución, ésta es nula. Para que tenga alguna otra debe ser compatible indeterminado, o sea, r(A) $\leq$ 2, o sea, $m = 0$ ó $m = -2$.

A.3.c) Aplicamos el método de Gauss: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \end{pmatrix}$.

La solución es $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$

A.4.a) Utilizamos el punto de r: P(1, 0, 1), el vector director de r: $\overline{u}$ = (2, 1, 0), y el vector $\overline{AB}$ = (0, -2, -4)

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 \end{vmatrix} = x - 2y + z - 2 = 0$$

A.4.b) Tomamos un punto genérico de r: X(1+2t, t, 1). Se tiene que cumplir que $|\overline{AX}| = |\overline{BX}|$

$$\sqrt{(2t)^2+(t-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{(2t)^2+(t+1)^2+(3)^2} \quad \rightarrow \quad t=-2. \quad X(-3,\ -2,\ 1)$$

B.1) $f(x)=x+\frac{1}{x}$; $x>0$; $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$; $f'(x)=0$; $x=1$

Se comprueba que es un mínimo usando la segunda derivada:
$f''(x)=\frac{2}{x^3}$; $f''(1)>0$ → Es un mínimo

B.2) $$\int\frac{x}{\cos^2 x}dx=\left[\begin{array}{c} u=x \ ; \ du=dx \\ dv=\frac{1}{\cos^2 x}dx \ ; \ v=tg\,x \end{array}\right]=x\cdot tgx-\int tgx\,dx=x\cdot tgx-\int\frac{senx}{cosx}dx=x\cdot tgx+\ln|cosx|$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\cos^2 x}dx=\frac{\pi}{4}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}-0=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$$

B.3.a) $det(3A)=3^3\cdot det(A)=3^3\cdot 2=54$

B.3.b) $det(A^{-1})=\frac{1}{det(A)}=\frac{1}{2}$

B.3.c) Se ha multiplicado por 3 la primera columna y por 4 la segunda. Después se han intercambiado la s filas primera y segunda. Llamando C a la matriz resultante: $det(C)=-3\cdot 4\cdot 2=-24$

B.3.d) Se ha cambiado la primera fila por una combinación lineal de ella con la tercera (el determinante no varía). Después se ha hecho una permutación en las filas (el determinante no varía). Por último se ha multiplicado por -1 la última fila. Llamando D a la matriz resultante: $det(D)=-2$

B.4.a) No se aplica la fórmula para la distancia puesto que todo lo que se haga aquí sirve para el apartado b).
Se calcula el plano que pasa por el origen y es perpendicular a *r*: $\overline{AB}$ = (1, -1, 4) ; π: x – y + 4z = 0.

Se hace el punto de corte entre *r* y π: $r:\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-\lambda \\ z=-1+4\lambda \end{cases}$;

$$1+\lambda+\lambda-4+16\lambda=0 \quad ; \quad \lambda=\frac{1}{6} \quad ; \quad P\left(\frac{7}{6},-\frac{1}{6},-\frac{2}{6}\right)$$

Por último se calcula la distancia: $d(O,r)=d(O,P)=\sqrt{\frac{54}{36}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

B.4.b) Se pide la recta que pasa por O y por P: $s:\begin{cases} x=7\lambda \\ y=-\lambda \\ z=-2\lambda \end{cases}$