SOLUCIONES

Prueba de Acceso a la Universidad. Universidades de Andalucía **Matemáticas II**

Examen 5. Año 2014

Paco Muñoz. IES Virgen de la Cabeza – Marmolejo (Jaén)

A.1) $\lim_{x\to 0}\frac{tg\,x-sen\,x}{x-sen\,x}=\left(\frac{0}{0}\right)\ (aplicamos\ L'Hopital)\ =$

$\lim_{x\to 0}\frac{1+tg^2\,x-\cos x}{1-\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)\ (aplicamos\ L'Hopital)\ =$

$\lim_{x\to 0}\frac{2\,tg\,x(1+tg^2\,x)+sen\,x}{sen\,x}=\left(\frac{0}{0}\right)\ (aplicamos\ L'Hopital)\ =$

$\lim_{x\to 0}\frac{2(1+tg^2\,x)^2+4\,tg^2\,x(1+tg^2\,x)+\cos x}{\cos x}=\frac{2+0+1}{1}=3$

A.2.a) La pendiente de la recta es m = -1. Por tanto, en el punto buscado se debe cumplir $f'(x)=-1$

$$f'(x)=3x^2-6x-1\ \ ;\ \ f'(x)=-1\ \ ;\ \ x=0\,;x=2$$

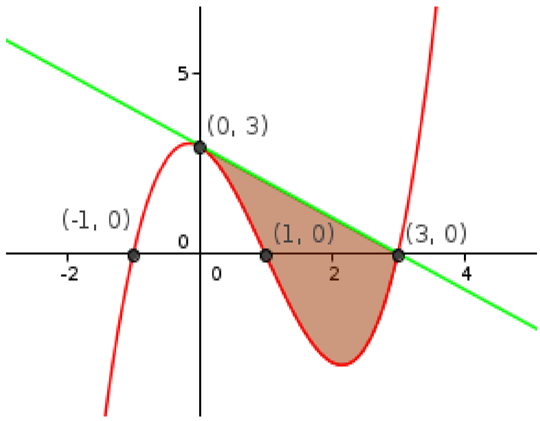
Hay dos posibilidades. Calculamos f(0) = 3 y f(2) = -3. Los puntos pueden ser (0 , 3) o (2 , -3).

Por otro lado, el punto buscado debe estar en la recta. El primero sí está; el segundo no. Por tanto el punto es (0 , 3).

A.2.b) Calculamos los puntos de corte entre la curva y la recta:

$x^3-3x^2-x+3=-x+3\ \ ;\ \ x=0\,;x=3$

El área pedida es $\left|\int_0^3(x^3-3x^2)dx\right|=\left|\frac{81}{4}-27\right|=\frac{27}{4}u^2$



A.3.a) $A=\begin{pmatrix}0&\lambda&\lambda+1\\ \lambda&0&1\\ 1&0&\lambda\end{pmatrix}$. Estudiamos el rango de A y $\overline{A}$.

$|A|=\lambda-\lambda^3\ \ ;\ \ |A|=0\ \ ;\ \ \lambda=0\ ,\ \lambda=1\ \ ;\ \ \lambda=0\ ,\ \lambda=-1$. Para $\lambda\neq 0$, $\lambda\neq 1$ y $\lambda\neq -1$ tenemos r(A) = r($\overline{A}$) = n = 3. Sistema compatible determinado.

Para λ = 0 el menor A_{22} , $\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}\neq 0$. Al ampliarlo se obtiene $\begin{vmatrix}0&1&0\\0&1&0\\1&0&0\end{vmatrix}=0$ r(A) = r($\overline{A}$) = 2 ; n = 3. Sistema compatible indeterminado.

Para λ = 1 el menor A_{33} , $\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}\neq 0$. Al ampliarlo se obtiene $\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&0&1\end{vmatrix}=0$. Por tanto r(A) = r($\overline{A}$) = 2 ; n = 3. Sistema compatible indeterminado.

Para λ = -1 el menor A_{33} , $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$. Al ampliarlo se obtiene $\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$. Por tanto r(A) = 2 ; r($\overline{A}$) = 3. Sistema incompatible.

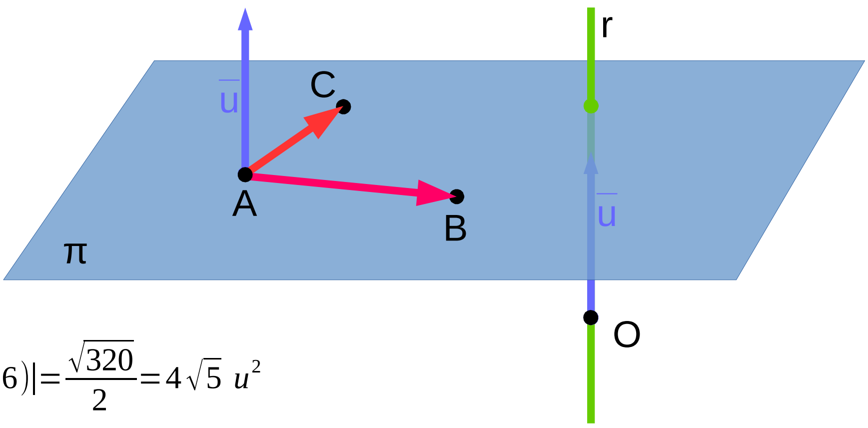
A.3.b) Según la discusión anterior, hacemos z = t, y el sistema queda $\left.\begin{matrix} y=1-2t \\ x=1-t \end{matrix}\right\}$. Con esto está resuelto.

A.3.c) Para λ = 0 el sistema queda: $\left.\begin{matrix} z=0 \\ z=0 \\ x=0 \end{matrix}\right\}$. Las soluciones son (0, t , 0). Tres soluciones pueden ser (0, 1 , 0) , (0, 2 , 0) y (0, 3 , 0).

A.4.a) Utilizamos el punto A y los vectores $\vec{AB}=(6,\,2,\,3)$ y $\vec{AC}=(2,\,-2,\,1)$. El plano es $\pi:\begin{cases} x=-3+6\lambda+2\mu \\ y=4+2\lambda-2\mu \\ z=3\lambda+\mu \end{cases}$

A.4.b) Utilizamos el punto O y el vector normal del plano: $\vec{u}=\vec{AB}\times\vec{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 6 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}=(8,\,0,\,-16)$.

La recta es $r:\begin{cases} x=8\lambda \\ y=0 \\ z=-16\lambda \end{cases}$



A.4.c) Área = $\frac{1}{2}|\vec{AB}\times\vec{AC}|=|(8,\,0,\,-16)|=\frac{\sqrt{320}}{2}=4\sqrt{5}\;u^2$

B.1.a) $Dom\,f=\mathbb{R}$. Asíntotas horizontales:

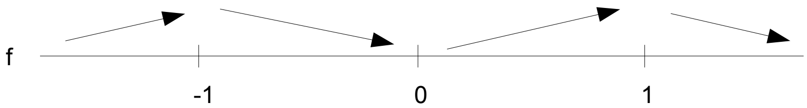
$\lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x^2}=(+\infty\cdot 0)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^{x^2}}=$ (L'Hopital) $=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{2xe^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x^2}}=0$. Tenemos una asíntota horizontal por +∞ en $y = 0$.

El resultado es el mismo por -∞ puesto que en la función se eleva al cuadrado. Tiene simetría par.

Asíntotas verticales: no tiene puesto que $Dom f = \mathbb{R}$.

Asíntotas oblícuas: no tiene puesto que ya tiene horizontales.

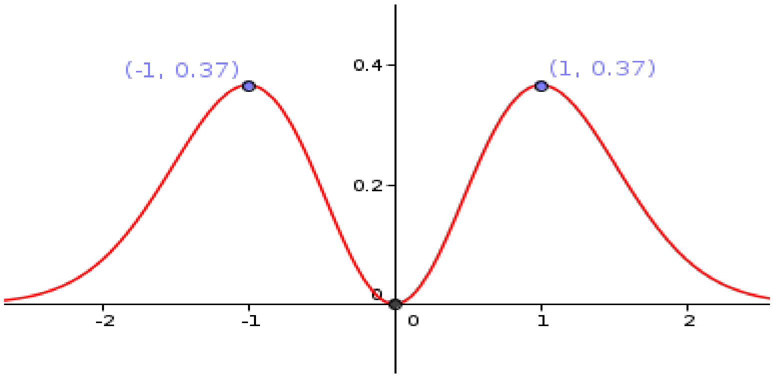
B.1.b) $f'(x)=(2x-2x^3)e^{-x^2}$; $f'(x)=0$; $\begin{cases} e^{-x^2}\neq 0 \\ 2x-2x^3=0 \ ; \ x=0 \ , \ x=\pm 1 \end{cases}$



La función es creciente en los intervalos (-∞ , -1) y (0 , 1). Es decreciente en (-1 , 1) y en (1 , +∞)

Tiene un máximo (absoluto) en (-1 , e^{-1}) y en (1 , e^{-1}). Tiene un mínimo (absoluto) en (0 , 0).

B.1.c) Con lo estudiado en los apartados anteriores se puede hacer la gráfica:



B.2) Hay que hacer una integral racional. El denominador ya esa descompuesto.

$\dfrac{x+9}{(x+1)(x-3)}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x-3}$; $x+9=A(x-3)+B(x+1)$. Damos valores *x* = *3* y *x* = *-1* y se obtiene *B* = *3* , *A* = *-2*.

$F(x)=-2\int\dfrac{1}{x+1} \ + \ 3\int\dfrac{1}{x-3}=-2\ln|x+1| \ + \ 3\ln|x-3|+K$. *F(1) = 0* ; *K = –ln2.*

$F(x)=-2\int\dfrac{1}{x+1} \ + \ 4\int\dfrac{1}{x-3}=-2\ln|x+1| \ + \ 4\ln|x-3|-\ln 2$

B.3) $X=A\cdot(B-A)A^{-1}$

$A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 1\\ 0 & -5 & 2\end{pmatrix}$; $A\cdot(B-A)=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ -1 & -1 & -3\\ -2 & 0 & -9\end{pmatrix}$; $X=\begin{pmatrix}-1 & -5 & 2\\ -1 & 18 & -7\\ -2 & 45 & -18\end{pmatrix}$

B.4.a) Utilizamos el punto A y el vector director de la recta como normal del plano: $\bar{u} = (2, 1, 3)$:

π: $2x + y + 3z + D = 0$; sustituimos A: 16 – 1 + 9 + D = 0 ; D = – 24. π: $2x + y + 3z - 24 = 0$.

B.4.b) Utilizamos el plano anterior y el punto de corte de r con π : P

$$r:\begin{cases} x=-1+2\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=1+3\lambda \end{cases} \quad ; \quad 2(-1+2\lambda)+2+\lambda+3(1+3\lambda)-24=0 \quad ; \quad \lambda=\frac{3}{2} \quad ; \quad P\left(2, \frac{7}{2}, \frac{11}{2}\right)$$

El punto P es el punto medio entre A y A' :

$$\vec{p}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{a'}) \quad ; \quad \vec{a'}=2\vec{p}-\vec{a}=(-4, 8, 8) \quad ; \quad A'(-4, 8, 8)$$