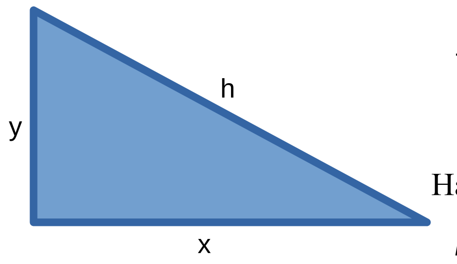
Paco Muñoz. IES Virgen de la Cabeza – Marmolejo (Jaén)

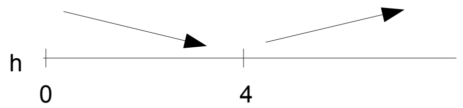
A.1)



$$\frac{x \cdot y}{2}=8 \quad ; \quad y=\frac{16}{x} \qquad h=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\frac{x^4+256}{x^2}}$$

Hay que buscar un mínimo a h. $\quad h'(x)=\dfrac{x^4-256}{x^2\cdot\sqrt{x^4+256}}$

$h'=0 \quad ; \quad x=4$



Se comprueba que en $x = 4$ se alcanza un mínimo para h. Por tanto, el triángulo rectángulo de catetos 4 y 4, y de hipotenusa $\sqrt{32}$, tiene un área de $8\ cm^2$, y su hipotenusa es la mínima posible entre todos los que tengan ese área.

A.2) $$\int \frac{dx}{2x(x+\sqrt{x})} \quad \left| \begin{array}{c} t=\sqrt{x} \\ t^2=x \\ 2t\,dt=dx \end{array} \right| \quad =\int \frac{2t\,dt}{2t^2(t^2+t)} = \int \frac{dt}{t(t^2+t)} = \int \frac{dt}{t^2(t+1)} \quad (integral\,racional) \quad =$$

$$\int \frac{dt}{t+1} - \int \frac{dt}{t} + \int \frac{dt}{t^2} = \ln|t+1| - \ln|t| - \frac{1}{t} = \ln|\sqrt{x}+1| - \ln|\sqrt{x}| - \frac{1}{\sqrt{x}} + K$$

A.3.a) $|A\cdot B|=|A|\cdot|B| \quad ; \quad |A^3|=|A|\cdot|A|\cdot|A|=27$

$$|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}=\frac{1}{3}$$

Como A es una matriz simétrica, $A = A^t$. Por tanto, $A + A^t = 2A$.

Si una línea de una matriz se multiplica por un número, el determinante queda multiplicado por ese número. En la matriz 2A se multiplican las tres filas por 2, por lo que el determinante queda multiplicado por 8.

$$|A+A^t|=|2A|=8\cdot 3=24$$

A.3.b) Si una línea de una matriz se multiplica por un número, el determinante queda multiplicado por ese número. En este caso por *2*.

Si en un determinante se permutan dos líneas, el determinante cambia de signo. En este caso se han permutado la 2^a y 3^a filas.

Por tanto, ese determinante vale *-6*.

A.3.c) Si una línea es suma de dos, el determinante es suma de dos determinantes:

$$\begin{vmatrix} a & b & 4a-c \\ b & d & 4b-e \\ c & e & 4c-f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & 4a \\ b & d & 4b \\ c & e & 4c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & -c \\ b & d & -e \\ c & e & -f \end{vmatrix} =$$

Si en un determinante dos filas (o dos columnas) son proporcionales, el determinante vale 0. En este caso, en el primero, la primera y la tercera columna son proporcionales. Ese determinante es 0.

Si en un determinante, una línea se multiplica por un número, el determinante queda multiplicado por ese número. En este caso, en el segundo determinante, la tercera columna se ha multiplicado por -1 con respecto al original, por lo que vale -3.

$$\begin{vmatrix} a & b & 4a-c \\ b & d & 4b-e \\ c & e & 4c-f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & 4a \\ b & d & 4b \\ c & e & 4c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & -c \\ b & d & -e \\ c & e & -f \end{vmatrix} = 0+(-3)=-3$$

A.4.a) Punto genérico de r: *P(1+λ , 1+λ , λ)* y de s: *Q(1-2μ , μ , 1-2μ)*.

La recta pedida es la recta que pase por P y por Q, de forma que el vector $\overrightarrow{PQ}$ sea perpendicular a r y a s. Sacamos los vectores directores de r: $\bar{u}$ = *(1 , 1 , 1)* y de s: $\bar{v}$ = *(-2 . 1 , -2)*. $\overrightarrow{PQ}=(-2\mu-\lambda,\mu-\lambda-1,-2\mu-\lambda+1)$

$$\begin{cases} \overrightarrow{PQ}\perp\vec{u} \quad ; \quad -2\mu-\lambda+\mu-\lambda-1-2\mu-\lambda+1=0 \quad ; \; -3\mu-3\lambda=0 \\ \overrightarrow{PQ}\perp\vec{v} \quad ; \quad 4\mu+2\lambda+\mu-\lambda-1+4\mu+2\lambda-2=0 \quad ; \quad 9\mu+3\lambda-3=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6\mu-3=0 \quad ; \quad \mu=\dfrac{1}{2} \\ \qquad\qquad\qquad \lambda=\dfrac{-1}{2} \end{cases} \; ; \; P\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) \quad ; \quad \overrightarrow{PQ}=\left(\frac{-1}{2},0,\frac{1}{2}\right) \; . \; \text{Solución: } t: \vec{X}=\vec{P}+\alpha\,\overrightarrow{PQ}$$

A.4.b) d(r , s) = d (P , Q)$=|\overrightarrow{PQ}|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}u$

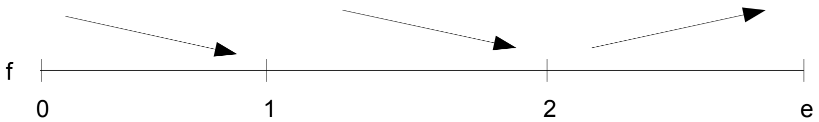
B.1.a) La función tiene dos trozos que son funciones continuas y derivables en sus dominios respectivos. En *x = 1* debe haber continuidad y derivabilidad.

Continuidad: $f(1)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=a-1$, $\lim_{x\to 1^+} f(x)=b$ $\qquad a-1=b$

Derivabilidad: $f'(x)=\begin{cases} -1 & , \; si \;\; x<1 \\ -\dfrac{b}{x^2}+\dfrac{1}{x} & , \; si \;\; x>1 \end{cases}$; $\begin{matrix} f'(1^-)=-1 \\ f'(1^+)=-b+1 \end{matrix}$; $-b+1=-1$; $b=2$; $a=3$

B.1.b) $f(x)=\begin{cases} 3-x \; , \; si \;\; x\le 1 \\ \dfrac{2}{x}+\ln x \; , \; si \;\; x>1 \end{cases}$ $\qquad f'(x)=\begin{cases} -1 & , \; si \;\; x\le 1 \\ \dfrac{-2}{x^2}+\dfrac{1}{x} & , \; si \;\; x>1 \end{cases}$

Igualamos a 0 la derivada y resolvemos. $\begin{cases} -1 \neq 0 \\ \dfrac{-2}{x^2} + \dfrac{1}{x} = 0 \;\; ; \;\; x = 2 \end{cases}$



$f(0)=3$ Máximo absoluto
$f(2)=1+\ln 2$ Mínimo absoluto
$f(e)=\dfrac{2}{e}+1 \approx 1{,}74$ Máximo relativo

B.2.a) $f'(x)=e^x(\cos x - sen\, x)$ $\quad t: \;\; y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

$$f'(0)=1 \quad ; \quad f(0)=1$$

$$t: \;\; y=1(x-0)+1 \quad ; \quad y=x+1$$

B.2.b) $F(x)=\int e^x \cos x\, dx = \begin{bmatrix} u=e^x \;\; ; \;\; du=e^x dx \\ dv=\cos x\, dx \;\; ; \;\; v=sen x \end{bmatrix} = e^x \cdot sen\, x - \int e^x\, sen x\, dx =$

$$\begin{bmatrix} u=e^x \;\; ; \;\; du=e^x dx \\ dv=sen x\, dx \;\; ; \;\; v=-\cos x \end{bmatrix} = e^x \cdot sen\, x + e^x \cos x - \int e^x \cos x\, dx = e^x(sen x+\cos x) - F(x)$$

$$2F(x)=e^x(sen x+\cos x) \quad ; \quad F(x)=\frac{1}{2}e^x(sen x+\cos x)+K \quad ; \quad F(0)=0 \quad ; \quad \frac{1}{2}+K=0 \quad ; \quad K=\frac{-1}{2}$$

$$F(x)=\frac{e^x(sen x+\cos x)-1}{2}$$

B.3.a) Estudiamos los rangos:

$$\begin{vmatrix} m & -2 & 1 \\ 1 & -2m & 1 \\ 1 & -2 & m \end{vmatrix} = -2m^3+6m-4 \quad ; \quad -2m^3+6m-4=0 \rightarrow x=1 \;\; ; \;\; x=-2$$

Tenemos entonces que para $x \neq 1$ y $x \neq 2$, r(A) = r($\overline{A}$) = n = 3. El sistema es compatible determinado.

Para $x = 1$, todos los menores de orden 2 valen 0, tanto en A como en $\overline{A}$, por lo que r(A) = r($\overline{A}$) = 1. El sistema es compatible indeterminado.

Para $x = -2$, el menor $\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$, por lo que r(A) = 2.

Ampliamos con ese menor: $\begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$, por lo tanto, $r(\overline{A}) = 2$. El sistema es compatible indeterminado.

B.3.b) Hemos utilizado para la discusión el menor formado por la *x* y la *y* en las dos primeras ecuaciones. Por tanto, hacemos $z = \lambda$, y el sistema queda:

$$\left.\begin{array}{r} -2x-2y=1-\lambda \\ x+4y=-2-\lambda \end{array}\right\} \quad x=\frac{\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2-\lambda & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}}=\lambda \;\; ; \;\; y=\frac{\begin{vmatrix} -2 & 1-\lambda \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}}=\frac{3+3\lambda}{-6}=\frac{-1-\lambda}{2}$$

B.4.a) Comprobamos si el vector normal del plano y el director de la recta son perpendiculares:

$\vec{u}=(2,1,-1)$; $\vec{v}=(-2,1,-3)$; $u\cdot v=0.$ La recta y el plano son paralelos.

Tomamos un punto de la recta y lo sustituimos en el plano: $P(5,0,6)$, se sustituye y no da 0. Por tanto, la recta y el plano son paralelos disjuntos.

B.4.b) Obtenemos el plano pedido utilizando un punto de *r* (*P*), su vector director ($\overline{v}$), y el vector normal de π ($\overline{u}$). El plano pedido es $\rho:\begin{cases} x=5-2\lambda+2\mu \\ y=\lambda+\mu \\ z=6-3\lambda-\mu \end{cases}$

B.4.c) Obtenemos el plano pedido utilizando un punto de *r* (*P*), su vector director ($\overline{v}$), y el vector resultante de $\overline{u}\times\overline{v}$. $u\times v=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix}=(-2,8,4)$

El plano pedido es $\sigma:\begin{cases} x=5-2\lambda-2\mu \\ y=\lambda+8\mu \\ z=6-3\lambda+4\mu \end{cases}$