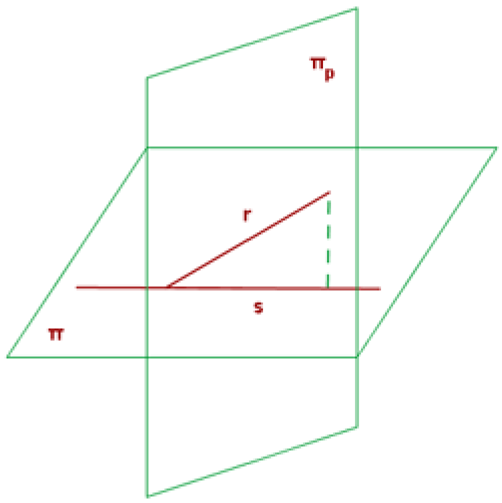
Ejercicios de Rectas y planos: Problemas métricos.

1. Dada la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}$ y el plano $\pi \equiv x + y + z - 4 = 0$, hallar la ecuación de la recta s, proyección ortogonal de r sobre π.

La recta s es la intersección del plano π con el plano π_p que contiene a la recta r y es perpendicular a π.

El plano π_p queda determinado por el punto A(1, −1, 0), el vector (2, 1, 1) y el vector normal, (1, 1, 1), del plano perpendicular π.



$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 1 \\ y+1 & 1 & 1 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad -y + z - 1 = 0 \qquad s \equiv \begin{cases} x + y + z - 4 = 0 \\ -y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

2. Calcular la distancia entre las rectas:

$$r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{4} \qquad s \equiv \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = -1 \\ z = 8 + 2\lambda \end{cases}$$

$$A(2,2,-1) \qquad \vec{u} = (3,-1,4) \qquad B(5,-1,8) \qquad \vec{v} = (1,0,2)$$

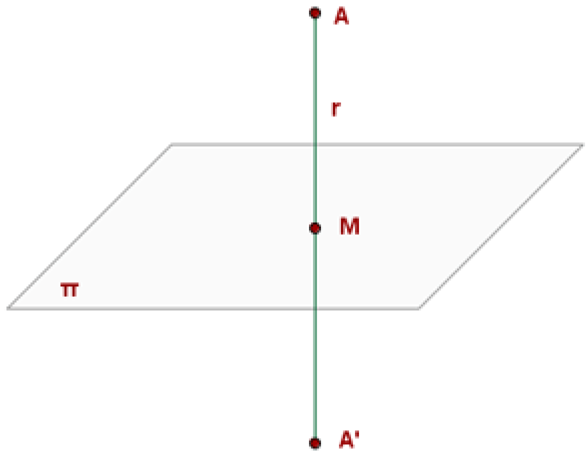
$$\overrightarrow{AB} = (5-2, 2+1, 8+1) = (3,-3,9)$$

$$\left|\left[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}\right]\right| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & 9 \end{vmatrix} = 9$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} \qquad |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3$$

$$d(r,s) = \frac{9}{3} = 3$$

3. Hallar el simétrico del punto A(3, 2, 1) respecto del plano $x + y + z + 21 = 0$.



En primer lugar calculamos r, que es la recta que pasa por A y es perpendicular a π.

$$r \equiv \frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{1}$$

Hallamos el punto de intersección de la recta r y el plano π.

$$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x - z - 2 = 0 \\ x + y + z + 21 = 0 \end{cases} \qquad M(-6,-7,-8)$$

Teniendo en cuenta las coordenadas del punto medio de un segmento, podemos hallar el extremo A'.

$$-6 = \frac{3+x}{2} \qquad -7 = \frac{2+y}{2} \qquad -8 = \frac{1+z}{2} \qquad A'(-15,-16,-17)$$

4. Calcular el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección del plano $6x + 3y + 2z = 6$ con los ejes coordenados.

$$y = 0,\ z = 0 \rightarrow \quad x = 1 \qquad A(1,0,0)$$

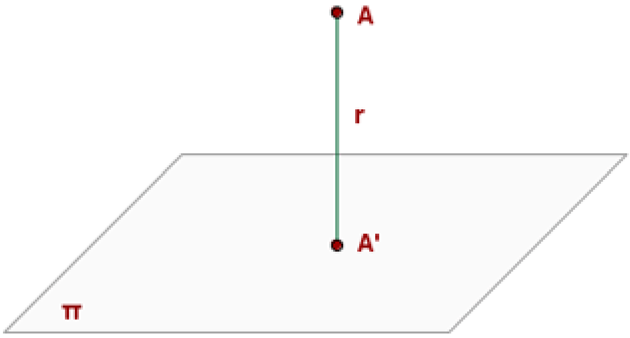
$$x = 0,\ z = 0 \rightarrow \quad y = 2 \qquad B(0,2,0)$$

$$x = 0,\ y = 0 \rightarrow \quad z = 3 \qquad C(0,0,3)$$

$$\overrightarrow{AB} = (0-1, 2-0, 0-0) = (-1,2,0) \quad \overrightarrow{AC} = (0-1, 0-0, 3-0) = (-1,0,3)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k} \qquad A_T = \frac{1}{2}\sqrt{6^2+3^2+2^2} = \frac{7}{2}u^2$$

5. Dado el plano de ecuación $\pi \equiv x + 2y + 3z = 1$ y el punto A(1, 1, 1), hallar las coordenadas del pie de la perpendicular trazada desde A a ese plano (o sea, la proyección ortogonal de A sobre él).



$$A(1,1,1) \qquad \vec{u}_r = \vec{n} = (1,2,3) \quad r \equiv \begin{cases} 1+\lambda \\ 1+2\lambda \\ 1+3\lambda \end{cases}$$

El pie de la perpendicular es el punto de intersección entre el plano y la recta.

$$(1+\lambda) + 2(1+2\lambda) + 3(1+3\lambda) = 1 \;;\; \lambda = -\frac{5}{14} \qquad A'\left(\frac{9}{14}, \frac{4}{14}, \frac{-1}{14}\right)$$

6. Determinar la ecuación del plano π que está a $\sqrt{6}$ de distancia del origen y es paralelo a aquel que tiene por ecuación $2x + y - z = 3$.

$$2x + y - z + k = 0 \quad d(O,\pi) = \frac{|0+0-0+k|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

$k = 6 \qquad k = -6$

$\pi_1 \equiv 2x + y - z + 6 = 0$

$\pi_2 \equiv 2x + y - z - 6 = 0$

7. Hallar la distancia entre el punto A(3, 2, 7) y la recta diagonal del primer octante.

Recta diagonal: $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \qquad B(0,0,0) \qquad \vec{u}_r = (1,1,1)$

$$\overrightarrow{AB} = (0-3, 0-2, 0-7) = (-3,-2,-7)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \vec{u}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -2 & -7 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5\vec{i} - 4\vec{j} - \vec{k}$$

$$d(A,r) = \frac{\sqrt{5^2 + (-4)^2 + (-1)^2}}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{\sqrt{42}}{\sqrt{3}} = \sqrt{14}$$

8. Sabiendo que los lados de un cuadrado están en las rectas:

$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1} \qquad s \equiv \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3x - y - z = -4 \end{cases}$, calcular su área.

Las dos rectas deben ser paralelas. Como se pide el área de un cuadrado, los cuatro lados son iguales. Uno de ellos mide d(r, s). Hay que calcular esto.

Determinación lineal de la recta r: $A(1,0,2)$ $\vec{u}=(1,2,1)$

Determinación lineal de la recta s: $\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}=2\vec{i}+4\vec{j}+2\vec{k}$

$$\begin{array}{l} x-y+z=2 \\ \underline{-3x+y+z=4} \\ -2x \quad +2z=6 \end{array} \qquad x=0 \quad z=3 \quad y=1$$

$B(0,1,3)$ $\vec{v}=(2,4,2)$

$\overrightarrow{AB}=(0-1,1-0,3-2)=(-1,1,1)$

La distancia de la r a la recta s es igual a la distancia del punto B a la recta r.

$$\overrightarrow{AB}\times\vec{u}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-\vec{i}+2\vec{i}+3\vec{k}$$

$$d(B,r)=\frac{\sqrt{(-1)^2+2^2+3^2}}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}}=\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{7}{3}}$$

El lado del cuadrado es igual a la distancia entre las rectas r y s al cuadrado:

$$A_{\square}=\frac{7}{3}u^2$$