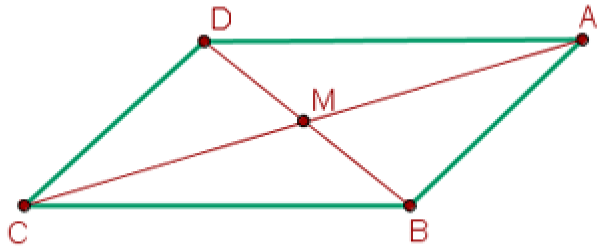
Ejercicios de Rectas y planos.

1. Las coordenadas de los vértices consecutivos de un paralelogramo son A(1, 0, 0) y B(0, 1, 0). Las coordenadas del centro M son M(0, 0, 1). Hallar las coordenadas de los vértices C y D.



$$(0,0,1)=\left(\frac{1+x_C}{2},\frac{0+y_C}{2},\frac{0+z_C}{2}\right)$$

$$0=\frac{1+x_C}{2} \qquad 0=\frac{0+y_C}{2} \qquad 1=\frac{0+z_C}{2}$$

$$x_C=-1 \qquad y_C=0 \qquad z_C=2$$

$$C(-1,0,2)$$

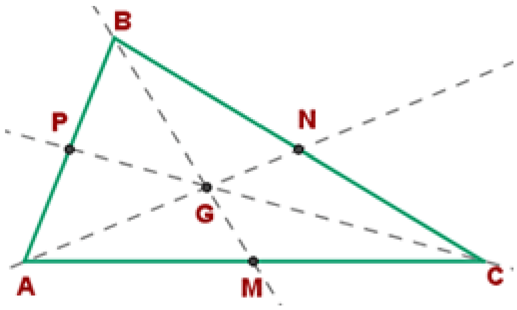
$$(0,0,1)=\left(\frac{0+x_D}{2},\frac{1+y_D}{2},\frac{0+z_D}{2}\right)$$

$$0=\frac{0+x_D}{2} \qquad 0=\frac{1+y_D}{2} \qquad 1=\frac{0+z_D}{2}$$

$$x_D=0 \qquad y_D=-1 \qquad z_D=2$$

$$D(0,-1,2)$$

2. Dado el triángulo de vértices A(2, 3, 4), B(1, −1, 5) y C(5, 5, 4), hallar las ecuaciones de las medianas del triángulo



$$P\left(\frac{2+1}{2},\frac{3-1}{2},\frac{4+5}{2}\right) \qquad P\left(\frac{3}{2},1,\frac{9}{2}\right)$$

$$M\left(\frac{2+5}{2},\frac{3+5}{2},\frac{4+4}{2}\right) \qquad M\left(\frac{7}{2},4,4\right)$$

$$N\left(\frac{1+5}{2},\frac{-1+5}{2},\frac{5+4}{2}\right) \qquad N\left(3,2,\frac{9}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{NA} = \left(2-3, 3-2, 4-\frac{9}{2}\right) = \left(-1, 1, -\frac{1}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{MB} = \left(1-\frac{7}{2}, -1-4, 5-4\right) = \left(-\frac{5}{2}, -5, 1\right)$$

$$\overrightarrow{PC} = \left(5-\frac{3}{2}, 5-1, 4-\frac{9}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, 4, -\frac{1}{2}\right)$$

$$A(2,3,4) \qquad \overrightarrow{NA} = \left(-1, 1, -\frac{1}{2}\right) \qquad r \equiv \begin{cases} x = 2-\lambda \\ y = 3+\lambda \\ z = 4-\frac{1}{2}\lambda \end{cases}$$

$$B(1,-1,5) \qquad \overrightarrow{MB} = \left(-\frac{5}{2}, -5, 1\right) \qquad s \equiv \begin{cases} x = 1-\frac{5}{2}\lambda \\ y = -1-5\lambda \\ z = 5+\lambda \end{cases}$$

$$C(5,5,4) \qquad \overrightarrow{PC} = \left(\frac{7}{2}, 4, -\frac{1}{2}\right) \qquad t \equiv \begin{cases} x = 5+\frac{7}{2}\lambda \\ y = 5+4\lambda \\ z = 4-\frac{1}{2}\lambda \end{cases}$$

3. Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos A (2, 3, 4) y B(8, −2, 3). Estudiar si el punto C(2, 1, 3) está alineado con A y B.

$$\overrightarrow{AB} = (8-2, -2-3, 3-4) = (6, -5, -1)$$

$$\frac{x-2}{6} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z-4}{-1}$$

Para que el punto C este alineado con A y B, debe pertenecer a la recta que pasa por A y B.

$$\frac{2-2}{6} \neq \frac{1-3}{-5} \neq \frac{3-4}{-1}$$

Como C no satisface las ecuaciones de la recta, no está alineado con A y B.

4. Determinar los valores de m para que los puntos A(m, 2, −3), B(2, m, 1) y C(5, 3, −2) estén alineados y hallar las ecuaciones de la recta que los contiene.

$$\overrightarrow{BC} = (5-2, 3-m, -2-1) = (3, 3-m, -3)$$

$$rang\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}\right) = 1$$

$$\begin{pmatrix} 5-m & 1 & 1 \\ 3 & 3-m & -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 5-m & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$$-15+3m-3=0 \qquad m=6$$

5. Determinar el valor de x para que los puntos A(0, 0, 1), B(0, 1, 2), C(−2, 1, 3) y D(x, x-1, 2) sean coplanarios.

Para que los puntos sean coplanarios, los vectores determinados por ellos también han de ser coplanarios, es decir, que el rango de los vectores sea 2.

$$\overrightarrow{AB} = (0-0, 1-0, 2-1) = (0, 1, 1)$$

$$\overrightarrow{AC} = (-2-0, 1-0, 3-1) = (-2, 1, 2)$$

$$\overrightarrow{AD} = (x-0, x-1-0, 2-1) = (x, x-1, 1)$$

Para que el rango sea igual a 2, el determinante de las componentes de los vectores ha de ser igual a cero.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ x & x-1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$2x - 2x + 2 - x + 2 = 0 \qquad x = 4$$

6. ¿Qué en relación se ha de verificar entre los parámetros a, b y c para que los puntos A(1, 0, 1), B(1, 1, 0), C(0, 1, 1) y D(a, b, c) sean coplanarios?

Los puntos A, B, C y D son coplanarios si:

$$rang\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = 2$$

$$\overrightarrow{AB} = (1-1, 1-0, 0-1) = (0, 1, -1)$$

$$\overrightarrow{AC} = (0-1, 1-0, 1-1) = (-1, 1, 0)$$

$$\overrightarrow{AD} = (a-1, b-0, c-1) = (a-1, b, c-1)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ a-1 & b & c-1 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ a-1 & b & c-1 \end{vmatrix} = 0$$

$$b + a - 1 + c - 1 = 0 \qquad a + b + c = 2$$

7. Calcular el valor de a para que los puntos (a, 0, 1), (0, 1, 2), (1, 2, 3) y (7, 2, 1) sean coplanarios. Calcular también la ecuación del plano que los contiene.

$$rang\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right) = 2 \; ; \; \overrightarrow{BA} = (a-0, 0-1, 1-2) = (a, -1, -1)$$

$$\overrightarrow{BC} = (1-0, 2-1, 3-2) = (1, 1, 1) \; ; \; \overrightarrow{BD} = (7-0, 2-1, 1-2) = (7, 1, -1)$$

$$\begin{vmatrix} a & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{array}{l} -a - 7 - 1 + 7 - 1 - a = 0 \\ -2a - 2 = 0 \qquad a = -1 \end{array}$$

$$B(0, 1, 2) \qquad \overrightarrow{BC} = (1, 1, 1) \qquad \overrightarrow{BD} = (7, 1, -1)$$

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 7 \\ y-1 & 1 & 1 \\ z-2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad -2x + 8y - 6z + 4 = 0$$

$$x - 4y + 3z - 2 = 0$$

8. Una recta es paralela a los planos x + y = 0, x + z = 0 y pasa por por el punto (2, 0, 0). Hallar sus ecuaciones.

$$\overrightarrow{n_1} = (1,1,0) \qquad \overrightarrow{n_2} = (1,0,1)$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - \vec{k} - \vec{j}$$

$$A(2,0,0) \qquad \vec{u} = (1,-1,-1) \qquad \frac{x-2}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-1}$$

9. Dados los puntos A(2, 6, −3) y B(3, 3, −2), hallar los puntos de la recta AB que tienen al menos una coordenada nula.

$$\overrightarrow{AB} = (3-2, 3-6, -2+3) = (1,-3,1)$$

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 6 - 3\lambda \\ z = -3 + \lambda \end{cases}$$

$$\lambda = -2 \qquad (0,12,-5)$$

$$\lambda = 2 \qquad (4,0,-1)$$

$$\lambda = 3 \qquad (5,-3,0)$$

10. Hallar una ecuación continua de la recta que es paralela a los planos: x − 3y + z = 0 y 2x − y + 3z − 5 = 0, y pasa por el punto (2, −1, 5).

El vector director de la recta es perpendicular a los vectores normales de cada plano.

$$\overrightarrow{n_1} = (1,-3,1) \qquad \overrightarrow{n_2} = (2,-1,3)$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -9\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} + 6\vec{k} - 3\vec{j} + \vec{i}$$

$$A(2,-1,5) \qquad \vec{u} = (-8,-1,5) \qquad \frac{x-2}{-8} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-5}{5}$$

11. Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto A(1, −1, 0) y corta a las rectas:

$$r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{1} \qquad s \equiv \frac{x}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-2}$$

La recta pedida es la intersección de los dos planos que pasan por A y contienen a las rectas r y s.

Plano que contiene a A y r.

$$\overrightarrow{AB} = (2-1, 0+1, 1-0) = (1,1,1)$$

$$A(1,-1,0) \qquad \vec{u} = (3,2,1) \qquad \overrightarrow{AB} = (1,1,1)$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & 3 & 1 \\ y+1 & 2 & 1 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad x - 2y + z - 3 = 0$$

Plano que contiene a A y s.

$$\overrightarrow{AC} = (0-1, 2+1, 0-0) = (-1,3,0)$$

$$C(0,2,0) \qquad \vec{v} = (-1,1,-2) \qquad \overrightarrow{AC} = (-1,3,0)$$

$$\begin{vmatrix} x & -1 & -1 \\ y-2 & 1 & 3 \\ z & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{array}{c} 6x + 2y - 2z - 4 = 0 \\ 3x + y - z - 2 = 0 \end{array}$$

La recta perdida es:

$$t \equiv \begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0 \\ 3x + y - z - 2 = 0 \end{cases}$$

12. Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos A(1, −2, 4), B(0, 3, 2) y es paralelo a la recta:

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{2}$$

$$A(1,-2,4) \qquad \overrightarrow{AB} = (-1,5,-2) \qquad \vec{u} = (4,1,2)$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & -1 & 4 \\ y+2 & 5 & 1 \\ z-4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad 4x - 2y - 7z + 20 = 0$$

13. Hallar la ecuación implícita del plano que pasa por el punto P(1, 1, 1) y es paralelo a:

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda - 3\mu \\ y = 3 + 2\mu \\ z = -1 - \mu \end{cases}$$

$$P(1,1,1) \qquad \vec{u} = (2,0,0) \qquad \vec{v} = (-3,2,-1)$$

$$\begin{vmatrix} x- & 2 & -3 \\ y-1 & 0 & 2 \\ z-1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad -2\begin{vmatrix} y-1 & 2 \\ z-1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$-2(-y + 1 - 2z + 2) = 0 \qquad y + 2z - 3 = 0$$

14. Hallar la cual del plano que contiene a la recta $\frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-4}{3}$ y es paralelo a la recta

$$\begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

El punto A(2, 2, 4) y el vector $\vec{u} = (1, -2, 3)$ pertenecen al plano, ya que la primera recta está contenida en el plano.

El vector $\vec{v} = (3, 2, 1)$ es un vector del plano, por ser paralelo a la recta.

$A(2,2,4) \qquad \vec{u} = (1,-2,3) \qquad \vec{v} = (3,2,1)$

$$\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 3 \\ y-2 & -2 & 2 \\ z-4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad x - y - z + 4 = 0$$

15. Hallar la ecuación del plano paralelo a las rectas de ecuaciones:

$r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$ $\qquad s \equiv \begin{cases} 2x - y + z = -2 \\ -x + y + 3z = 1 \end{cases}$ y que pasa por el punto (1, 1, 2).

Ecuación paramétrica de s:

$$\begin{cases} 2x - y + z = -2 \\ -x + y + 3z = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - y = -2 - z \\ -x + y = 1 - 3z \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2-z & -1 \\ 1-3z & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = 1 - 4z \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2-z \\ -1 & 1-3z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = -7z$$

$$s \equiv \begin{cases} x = 1 - 4\lambda \\ y = -7\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

$A(1,1,2) \qquad \vec{u} = (-1,1,2) \qquad \vec{v} = (-4,-7,1)$

$$\begin{vmatrix} x-1 & -1 & -4 \\ y-1 & 1 & -7 \\ z-2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad 15x - 7y + 11z - 30 = 0$$

16. Hallar la ecuación de una recta que pasa por el punto A(1, 0, 2) y se apoya en las rectas:

$r \equiv \frac{x}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{1}$ $\qquad s \equiv \frac{x+1}{6} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{1}$

Obtenemos un punto genérico de la recta r.

$$\frac{x}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{1} \qquad \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \qquad P(3\lambda, -2+\lambda, \lambda)$$

Obtenemos un punto genérico de la recta s.

$$\frac{x+1}{6}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{1} \qquad \begin{cases} x=-1+6\mu \\ y=-2\mu \\ z=\mu \end{cases} \qquad Q(-1+6\mu,-2\mu,\mu)$$

Los vectores $\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{AQ}$ deben ser linealmente dependientes, deben tener rango 1.

$$\overrightarrow{AP}=(3\lambda-1,-2+\lambda,\lambda-2)\ ;\ \overrightarrow{AQ}=(-2+6\mu,-2\mu,\mu-2)$$

Se hacen los tres menores de orden 2 que se pueden obtener con los dos vectores y se igualan a 0.

Se obtiene así un sistema de ecuaciones, cuyas soluciones son:

$$\lambda=\frac{8}{9} \qquad \mu=\frac{2}{3}$$

La recta pedida es una recta que pasa por A, con vector director $\overrightarrow{AP}$:

$$\frac{x-1}{-2}=\frac{y}{-4/3}=\frac{z-2}{-4/3}$$

(Otra forma más rápida de hacer este ejercicio está en el ejercicio 11)

17. Estudiar para los diferentes valores de **a** la posición relativa de los siguientes planos:

$$\pi_1 \equiv ax+y+z=1$$
$$\pi_2 \equiv x+ay+z=1$$
$$\pi_3 \equiv x+y+az=1$$

$$M=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \qquad M'=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{pmatrix}$$

En el determinante de la matriz de los coeficientes sumamos a la primera fila las otras dos y posteriormente sacamos factor común.

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+2 & a+2 & a+2 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=(a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=$$

Restamos a cada fila la primera:

$$=(a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix}=(a+2)(a-1)^2$$

Si $a\neq-2, a\neq 1$

$$r(M)=r(M')=3$$

Los tres planos se cortan en un punto.

Si $a=1$

Las tres ecuaciones son idénticas, **los tres planos son coincidentes**.

Si $a=-2$

$$M=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix} \qquad M'=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{vmatrix}=0 \qquad \begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}\neq 0 \qquad r(M)=2$$

$$\begin{vmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}\neq 0 \qquad r(M')=3$$

Como no hay ningún par de planos paralelos, los **tres planos se cortan dos a dos formando una superficie prismática**.

18. Estudiar las posiciones relativas del plano $\pi \equiv x+ay-z=1$ y la recta $r \equiv \begin{cases}2x+y-az=2\\ x-y-z=a-1\end{cases}$ según los valores del parámetro **a**.

$$\begin{cases}x+ay-z=1\\ 2x+y-az=2\\ x-y-z=a-1\end{cases}$$

$$M=\begin{pmatrix}1 & a & -1\\ 2 & 1 & -a\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix} \qquad M=\begin{pmatrix}1 & a & -1 & 1\\ 2 & 1 & -a & 2\\ 1 & -1 & -1 & a-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1 & a & -1\\ 2 & 1 & -a\\ 1 & -1 & -1\end{vmatrix}=0 \qquad -a^2+a+2=0 \qquad a=\begin{cases}2\\ -1\end{cases}$$

$Si \quad a\neq 2, a\neq -1$

$$r(M)=r(M')=3$$

La recta corta al plano en un solo punto.

$Si \quad a=2$

$$M=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix} \qquad M=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ 2 & 1 & -2 & 2\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}\neq 0 \qquad r(M)=2$$

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=0 \qquad r(M')=2$$

La recta está contenida en el plano.

Si $a = -1$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad r(M) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad r(M') = 3$$

La recta es paralela al plano.

19. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto de intersección de la recta $r \equiv \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{-1}$ con el plano $\pi \equiv x - 2y + 5z + 1 = 0$ y es paralelo a las rectas:

$$s \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1} \qquad t \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+4}{-2}$$

Las ecuaciones continuas de la recta r se pasan a implícitas, y éstas junto a la ecuación del plano forman un sistema, cuya solución es el punto de intersección.

$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ -x - 2z + 1 = 0 \\ x - 2y + 5z + 1 = 0 \end{cases} \qquad x = 1 \quad y = 1 \quad z = 0$$

El plano viene determinado por el el punto de intersección y los vectores directores de las rectas paralelas al plano.

$$A(1, 1, 0) \qquad \vec{u} = (-1, 2, 1) \qquad \vec{v} = (1, 1, -2)$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & -1 & 1 \\ y-1 & 2 & 1 \\ z & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \qquad -5x - y - 3z + 6 = 0$$