Ejercicios de Vectores.

1. Expresa el vector $\vec{m} = (1, 2, 3)$ como **combinación lineal** de los vectores:
$\vec{u} = (1, 0, 1)$, $\vec{v} = (1, 1, 0)$ y $\vec{w} = (0, 1, 1)$.

$$\vec{m} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$$

$$(1,2,3) = x(1,0,1) + y(1,1,0) + z(0,1,1)$$

$$(1,2,3) = (x+y, y+z, x+z)$$

$$\begin{cases} x+y=1 \\ y+z=2 \\ x+z=3 \end{cases} \qquad \begin{matrix} 2x+2y+2z=6 \\ x+y+z=3 \end{matrix}$$

Se resuelve el sistema y se obtiene:

$z = 2$ $\quad x = 1$ $\quad y = 0$

$$\vec{m} = \vec{u} + 2\vec{w}$$

2. Siendo $\vec{u} = (1, 0, 1)$, $\vec{v} = (1, 1, 0)$ y $\vec{w} = (0, 1, 1)$, demostrar que dichos vectores son linealmente independientes.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad ; \text{rang}(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = 3$$

Por tanto, los tres vectores son **linealmente independientes**.

3. Dados los vectores $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (2, 1, 0)$ y $\vec{w} = (-1, -1, 0)$, demostrar que dichos vectores forman una **base** y calcula las **coordenadas del vector** $(1, -1, 0)$ respecto de dicha **base**.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \quad ; \text{rang}(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = 3$$

Por tanto, los tres vectores son **linealmente independientes** y forman una **base**.

$$(1,-1,0) = x(1,2,3) + y(2,1,0) + z(-1,-1,0)$$

$$(1,-1,0) = (x+2y-z, 2x+y-z, 3x)$$

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2x+y-z=-1 \\ 3x=0 \end{cases} \qquad x=0 \quad y=2 \quad z=3$$

Las **coordenadas del vector** $(1, -1, 0)$ respecto a la **base** son: $(0, 2, 3)$.

4. Determinar el valor del parámetro k para que los vectores

$\vec{x} = k\vec{u} - 2\vec{v} + 3\vec{w}$, $\vec{y} = -\vec{u} + k\vec{v} + \vec{w}$ sean:

1. **Ortogonales**

Para que los **vectores** sean **ortogonales** su **producto escalar** tiene que ser igual a **cero**.

$$\vec{x}\cdot\vec{y}=0$$

$$\vec{x}\cdot\vec{y}=\left(k\vec{u}-2\vec{v}+3\vec{w}\right)\left(-\vec{u}+k\vec{v}+\vec{w}\right)=-k-2k+3$$

$$-3k+3=0 \qquad k=1$$

2. **Paralelos**

Para qué dos **vectores** sean **paralelos**, sus componentes tienen que ser **proporcionales**.

$$\frac{k}{-1}=\frac{-2}{k}=\frac{3}{1} \qquad \begin{cases} k^2=2 \\ k=-3 \end{cases}$$

El sistema no admite solución.

5. Dados los puntos A(1, 0, 1), B(1, 1, 1) y C(1, 6, a), se pide:

1. Hallar para qué valores del parámetro *a* están alineados.

Si A, B y C están alineados los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ tienen la **misma dirección**, por lo que son **linealmente dependientes** y tienen sus **componentes proporcionales**.

$$\overrightarrow{AB}=(1-1,1-0,1-1)=(0,1,0)$$

$$\overrightarrow{AC}=(1-1,6-0,a-1)=(0,6,a-1)$$

$$(0,6,a-1)=k\,(0,1,0) \qquad a-1=0 \qquad a=1$$

2. Hallar si existen valores de *a* para los cuales A, B y C son tres vértices de un paralelogramo de área 3 y, en caso afirmativo, calcularlos.

El módulo del **producto vectorial** de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ es igual al **área del paralelogramo** construido sobre $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 6 & a-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 6 & a-1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & a-1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 6\end{vmatrix}\vec{k}=(a-1)\vec{i}$$

$$A=\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=3$$

$$3=\sqrt{(a-1)^2+0^2+0^2} \qquad 9=(a-1)^2$$

$$a-1=3 \qquad a=4 \qquad C(1,6,4)$$

$$a-1=-3 \qquad a=-2 \qquad C(1,6,-2)$$

6. Hallar dos vectores de **módulo la unidad y ortogonales** a (2, −2, 3) y (3, −3, 2).

$$\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}\vec{k} = 5\vec{i} + 5\vec{j} = (5\ ,5\ ,0)$$

$$|\vec{w}| = \sqrt{5^2 + 5^2 + 0} = 5\sqrt{2}$$

$$\vec{u} = \left(\frac{5}{5\sqrt{2}}, \frac{5}{5\sqrt{2}}, 0\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$\vec{v} = \left(\frac{-5}{5\sqrt{2}}, \frac{-5}{5\sqrt{2}}, 0\right) = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

7. Hallar un **vector perpendicular** a $\vec{u} = (2, 3, 4)$ y $\vec{v} = (-1, 3, -5)$, y que sea **unitario**.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -5 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}\vec{k} = -27\vec{i} + 6\vec{j} + 9\vec{k}$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{(-27)^2 + 6^2 + 9^2} = \sqrt{846}$$

$$\vec{w} = \left(\frac{-27}{\sqrt{846}}, \frac{6}{\sqrt{846}}, \frac{9}{\sqrt{846}}\right)$$

8. Dados los vectores $\vec{u} = (3, 1, -1)$ y $\vec{v} = (2, 3, 4)$, hallar el **área del paralelogramo** que tiene por lados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$

$$A = |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{294}\, u^2$$

9. Dados los vectores $\vec{u} = (2, 1, 3)$, $\vec{v} = (1, 2, 3)$ y $\vec{w} = (-1, -1, 0)$, hallar el **producto mixto** $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$. ¿Cuánto vale el **volumen del paralelepípedo** que tiene por aristas los vectores dados?

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 6$$

$$V = 6u^3$$

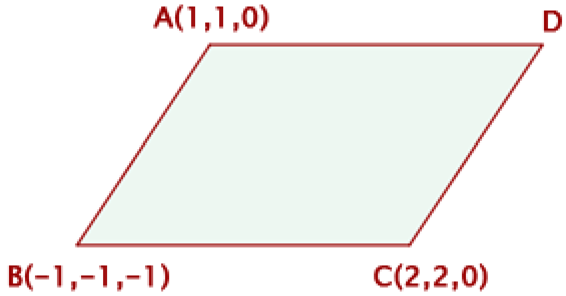
10. Sean A(−3, 4, 0), B(3, 6, 3) y C(−1, 2, 1) los tres vértices de un triángulo. Calcular el área del triángulo.

$$A = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \vec{k} = 8\vec{i} - 16\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \sqrt{64+256} = 8\sqrt{5} \qquad A = 4\sqrt{5}\ u^2$$

11. Considerar la siguiente figura:



Se pide:

1. Coordenadas de D para qué ABCD sea un **paralelogramo**.

Por ser la figura un paralelogramo, los vectores $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{BC}$ son equipolentes (iguales).

$$(x-1, y-1, z) = (2+1, 2+1, 1)$$

$$x - 1 = 3 \qquad x = 4$$

$$y - 1 = 3 \qquad y = 4$$

$$z = 1$$

$$D(4, 4, 1)$$

2. **Área** de este **paralelogramo**.

$$A = \left|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BA}\right|$$

$$\overrightarrow{BC} = (3, 3, 1) \qquad \overrightarrow{BA} = (2, 2, 1)$$

$$\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BA} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} = \vec{i} - \vec{j}$$

$$A = \left|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}\, u^2$$

12. Dados los puntos A(1, 0, 1), B(1, 1, 1) y C(1, 6, a), se pide:

1. Hallar para qué valores del parámetro *a* están alineados.

Si A, B y C están alineados los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ tienen la **misma dirección**, por lo que son **linealmente dependientes** y tienen sus **componentes proporcionales**.

$$\overrightarrow{AB} = (1-1, 1-0, 1-1) = (0, 1, 0)$$

$$\overrightarrow{AC} = (1-1, 6-0, a-1) = (0, 6, a-1)$$

$$(0, 6, a-1) = k\,(0, 1, 0) \qquad a-1=0 \qquad a=1$$

2. Hallar si existen valores de *a* para los cuales A, B y C son tres vértices de un paralelogramo de área 3 y, en caso afirmativo, calcularlos.

El módulo del **producto vectorial** de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ es igual al **área del paralelogramo** construido sobre $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & a-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 6 & a-1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a-1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}\vec{k} = (a-1)\vec{i}$$

$$A = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = 3$$

$$3 = \sqrt{(a-1)^2 + 0^2 + 0^2} \qquad 9 = (a-1)^2$$

$$a-1=3 \qquad a=4 \qquad C(1, 6, 4)$$

$$a-1=-3 \qquad a=-2 \qquad C(1, 6, -2)$$