Ejercicios de Sistemas de Ecuaciones lineales.

1. Resolver por la regla de Cramer:

a) $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 2y - z = 1 \\ -x + y = 1 \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \qquad x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{3} = \frac{6}{3} = 2 \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

b) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{0}{-4} = 0 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{0}{-4} = 0$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-4}{-4} = 1$$

2. Estudiar y resolver, si es posible, el sistema: $\begin{cases} x + 2y - 2z = 10 \\ 4x - y + z = 4 \\ -2x + y + z = -2 \\ -x - 3y = -11 \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 10 \\ 4 & -1 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & -3 & 0 & -11 \end{pmatrix}$$

$$|1| = 1 \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -18 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 10 \\ 4 & -1 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & -3 & 0 & -11 \end{vmatrix} = 0 \qquad r(A) = 3 \qquad r(A') = 3 \qquad n = 3$$

Sistema compatible determinado

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 10 \\ 4x - y + z = 4 \\ -2x + y + z = -2 \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-18} = \frac{-36}{-18} = 2 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 10 & -2 \\ 4 & 4 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{-18} = \frac{-54}{-18} = 3$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 4 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{-18} = \frac{18}{-18} = -1$$

3. Estudiar y resolver, si es posible, el sistema: $\begin{cases} x + y - z + u + v = 2 \\ x - 2y \quad + u \quad = 5 \\ -x \quad + z + \quad + 2v = 3 \\ \quad 3y + z - 2u \quad = -1 \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|1| \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 8 \neq 0 \qquad r(A) = 4 \qquad r(A') = 4 \qquad n = 5$$

Sistema compatible indeterminado

$$\begin{cases} x + y - z + u = 2 - \lambda \\ x - 2y + u = 5 \\ -x \quad + z + \quad = 3 - 2\mu \\ 3y + z - 2u = -1 \end{cases} \qquad v = \lambda$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & 0 & 1 \\ 3-2\lambda & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{8} = \frac{18 + 3\lambda}{8}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2-\lambda & -1 & 1\\ 1 & 5 & 0 & 1\\ -1 & 3-2\lambda & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & -2\end{vmatrix}}{8}=\frac{6-7\lambda}{8}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 2-\lambda & 1\\ 1 & -2 & 5 & 1\\ -1 & 0 & 3-2\lambda & 0\\ 0 & 3 & -1 & -2\end{vmatrix}}{8}=\frac{42-13\lambda}{8}$$

$$u=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & -1 & 2-\lambda\\ 1 & -2 & 0 & 5\\ -1 & 0 & 1 & 3-2\lambda\\ 0 & 3 & 1 & -1\end{vmatrix}}{8}=\frac{34-17\lambda}{8}$$

4. Resolver el sistema homogéneo: $\begin{cases}3x-2y-z=0\\ -4x+y-z=0\\ 2x+2z=0\end{cases}$

$$\begin{vmatrix}3 & -2 & -1\\ -4 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 2\end{vmatrix}\neq 0$$

r = 3 ; n = 3. Sistema compatible determinado.

Solución trivial: $x=y=z=0$

5. Discutir y resolver el sistema cuando sea compatible. $\begin{cases}2x+y+az=4\\ x+z=2\\ x+y+z=2\end{cases}$

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & a\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\qquad A'=\begin{pmatrix}2 & 1 & a & 4\\ 1 & 0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & 1 & a\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=a-2\qquad a-2=0\qquad a=2$$

$$A'=\begin{pmatrix}2 & 1 & a & 4\\ 1 & 0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\ c_4\to 2c_1\qquad A'=\begin{pmatrix}2 & 1 & a\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Si $a=2$ $\qquad r(A)=r(A')=2\qquad n=3$

Sistema compatible indeterminado

$$\begin{cases}2x+y=4-2\lambda\\ x=2-\lambda\end{cases}\qquad z=\lambda\qquad \Delta=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1$$

Si $a \neq 2$ $\quad r(A) = r(A') = n = 3$

Sistema compatible determinado

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & a \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2a - 4; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & a \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$x = \frac{2a-4}{a-2} = 2 \qquad y = 0 \qquad z = 0$$

6. Discutir y resolver el sistema cuando sea compatible: $\begin{cases} x + y + z = a \\ x + (a+1)y + z = 2a \\ x + y + (1+a)z = 0 \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & a+1 & 1 & 2a \\ 1 & 1 & a+1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{vmatrix} = a^2$$

Si $a = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$r(A) = r(A') = 1 \qquad n = 3$

Sistema compatible indeterminado

$$x+y+z=0 \qquad y = \lambda \qquad z = \mu \qquad x = -\lambda - \mu$$

Si $a \neq 0$, $\quad r(A) = r(A') = n = 3$

Sistema compatible determinado

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 2a & a+1 & 1 \\ 0 & 1 & a+1 \end{vmatrix} = a^3; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2a & 1 \\ 1 & 0 & a+1 \end{vmatrix} = a^2;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a+1 & 2a \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -a^2$$

$$x = \frac{a^3}{a^2} = a \qquad y = \frac{a^2}{a^2} = 1 \qquad z = \frac{-a^2}{a^2} = -1$$

7. Discutir el sistema: $\begin{cases} 2x - y + z - 2t = -5 \\ 2x + 2y - 3z + t = -1 \\ -x + y - z = -1 \\ 4x - 3y + 2z - 3t = -8 \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 & -5 \\ 2 & 2 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 4 & -3 & 2 & -3 & -8 \end{pmatrix}$$

$$|2| \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -10$$

$r(A) = 4 \qquad r(A') = 4 \qquad n = 4$

$r(A) = 4 \qquad r(A') = 4 \qquad n = 4$

Sistema compatible determinado

8. Resolver el sistema homogéneo: $\begin{cases} x + 5y - 4z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -7$$

$r = 2 \qquad n = 3$ Sistema compatible indeterminado

$$\begin{cases} x + 5y = 4\lambda \\ x - 2y = -\lambda \end{cases} \qquad z = \lambda$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4\lambda & 5 \\ -\lambda & -2 \end{vmatrix} = -3\lambda \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4\lambda \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -5\lambda$$

$$x = \frac{3\lambda}{7} \qquad y = \frac{5\lambda}{7} \qquad z = \lambda$$

9. Discutir y resolver el sistema cuando sea compatible.

$$\begin{cases} (a+1)x + y + z = a+1 \\ x + (a+1)y + z = a+3 \\ x + y + (1+a)z = -2a-4 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 & a+1 \\ 1 & a+1 & 1 & a+3 \\ 1 & 1 & a+1 & -2a-4 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{vmatrix} = a^2(a+3) \qquad a=0 \qquad a=-3$$

Si $a = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$r(A) = 1 \quad r(A') = 2$ Sistema incompatible

Si $a = -3$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad r(A) = r(A') = 2 \qquad n = 3$$

Sistema compatible indeterminado

$$\begin{cases} -2x + y = -2 - \lambda \\ x - 2y = -\lambda \end{cases} \qquad z = \lambda \qquad \Delta = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -\lambda & -2 \end{vmatrix}}{3} = \frac{4+3\lambda}{3} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2-\lambda \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix}}{3} = \frac{2+3\lambda}{3}$$

Si $a \neq 0, -3$ $\quad r(A) = r(A') = n = 3$

Sistema compatible determinado

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} (a+1) & 1 & 1 \\ (a+3) & (a+1) & 1 \\ (-2a-4) & 1 & (a+1) \end{vmatrix} = a(a+3)(a+1)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} (a+1) & (a+1) & 1 \\ 1 & (a+3) & 1 \\ 1 & (-2a-4) & (a+1) \end{vmatrix} = a(a+3)^2$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} (a+1) & 1 & (a+1) \\ 1 & (a+1) & (a+3) \\ 1 & 1 & (-2a-4) \end{vmatrix} = -2a(a+2)(a+3)$$

$$x = \frac{a(a+3)(a+1)}{a^2(a+3)} = \frac{a+1}{a} \qquad y = \frac{a(a+3)^2}{a^2(a+3)} = \frac{a+3}{a}$$

$$z=\frac{-2a(a+2)(a+3)}{a^2(a+3)}=\frac{-2(a+2)}{a}$$

10. Discutir y resolver el sistema cuando sea compatible. $\begin{cases} ax+y-z=0 \\ x+3y+z=0 \\ 3x+10y+4z=0 \end{cases}$

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 10 & 4 \end{vmatrix}=2(a-1) \quad a=1$$

Si $a \neq 1$ $r=3$ $n=3$

Solución trivial: $x=y=z=0$

Si $a=1$ $r=2$ $n=3$

Sistema compatible indeterminado

$$\begin{cases} x+y=\lambda \\ x+3y=-\lambda \end{cases} \qquad z=\lambda$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=2 \qquad \Delta_1=\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -\lambda & 3 \end{vmatrix}=4\lambda \qquad \Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix}=-2\lambda$$

$$x=\frac{4\lambda}{2}=2\lambda \qquad y=\frac{-2\lambda}{2}=-\lambda \qquad z=\lambda$$

11. Estudiar y resolver, si es posible, el sistema: $\begin{cases} 2x-y-2z=-2 \\ -x+y+z=0 \\ x-2y+z=8 \\ 2x-2y=6 \end{cases}$

1. Tomamos la matriz de los coeficientes y le hallamos el rango.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|2|=2\neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=2\neq 0$$

r(A) = 3

2. Hallamos el rango de la matriz ampliada $A'=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 8 \\ 2 & -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 8 \\ 2 & -2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0 \quad r(A') = 3$$

3. Aplicamos el teorema de Rouché.

$r(A) = 3 \qquad r(A') = 3 \qquad n = 3$

Sistema compatible determinado

4. Se resuelve el sistema, si éste no es incompatible, por la regla de Cramer o por el método de Gauss

Tomamos el sistema que corresponde a la submatriz de orden 3, que tiene rango 3, y lo resolvemos.

$$\begin{cases} 2x - y - 2z = -2 \\ -x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 8 \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 8 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{2}{2} = 1 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 8 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 8 \end{vmatrix}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

12. Discutir y resolver el sistema cuando sea compatible. $\begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ kx + 5y - 4z = 1 \\ 3x + 2y - z = 1 \end{cases}$

1. Hallamos el rango de la matriz de los coeficientes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ k & 5 & -4 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ k & 5 & -4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3k - 15 \qquad 3k - 15 = 0 \qquad k = 5$$

Si $k = 5$ $\quad r(A) = 2 \qquad$ Si $k \neq 5$ $\quad r(A) = 3$

2. Hallamos el rango de la matriz ampliada.

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ k & 5 & -4 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A'| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad r(A') = 3$$

3. Aplicamos el teorema de Rouché

Si $k = 5$ $\quad r(A) \neq r(A')$ $\quad$ Sistema incompatible.

Si $k \neq 5$ $\quad r(A) = r(A') = 3 \quad n = 3$ $\quad$ Sistema compatible determinado

4. Resolvemos el sistema compatible determinado por la regla de Cramer (también se puede resolver mediante el método de Gauss).

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 6; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ k & 1 & -4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 5k - 39;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ k & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 7k - 45$$

$$x = \frac{6}{3k-15} \qquad y = \frac{5k-39}{3k-15} \qquad z = \frac{7k-45}{3k-15}$$

13. Discutir y resolver el sistema cuando sea compatible. $\begin{cases} 2x + y + az = 4 \\ x + z = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a - 2 \qquad a - 2 = 0 \qquad a = 2$$

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} c_4 \to 2c_1 \qquad A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $a = 2$ $\quad r(A) = r(A') = 2$ $\quad n = 3$

Sistema compatible indeterminado

$$\begin{cases} 2x + y = 4 - 2\lambda \\ x = 2 - \lambda \end{cases} \qquad z = \lambda \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

Si $a \neq 2$ $\quad r(A) = r(A') = n = 3$

Sistema compatible determinado

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & a \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2a-4; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & a \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad x = \frac{2a-4}{a-2} = 2 \qquad y = 0 \qquad z = 0$$

14. Determinar para qué valores de k, el siguiente sistema tiene infinitas soluciones. $\left.\begin{array}{r} x+y+z=0 \\ x-y+z=0 \\ kx+z=0 \end{array}\right\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & -1 & 1 & \vdots & 0 \\ k & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2+f_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 2 & 0 & 2 & \vdots & 0 \\ k & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ k & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_3-f_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ k-1 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

$k-1=0 \qquad k=1 \qquad$ Sistema Compatible Indeterminado

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=0 \\ x+z=0 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} x=\lambda \\ y=0 \\ z=-\lambda \end{array}$$