Ejercicios de Matrices y Determinantes.

1. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcular: A + B; A − B; A x B; B x A; A^t.

$$A+B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & 0+0 & 1+1 \\ 3+1 & 0+2 & 0+1 \\ 5+1 & 1+1 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A-B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & 0-0 & 1-1 \\ 3-1 & 0-2 & 0-1 \\ 5-1 & 1-1 & 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot1+0\cdot1+1\cdot1 & 2\cdot0+0\cdot2+1\cdot1 & 2\cdot1+0\cdot1+1\cdot0 \\ 3\cdot1+0\cdot1+0\cdot1 & 3\cdot0+0\cdot2+0\cdot1 & 3\cdot1+0\cdot1+0\cdot0 \\ 5\cdot1+1\cdot1+1\cdot1 & 5\cdot0+1\cdot2+1\cdot1 & 5\cdot1+1\cdot1+1\cdot0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot2+0\cdot3+1\cdot5 & 1\cdot0+0\cdot0+1\cdot1 & 1\cdot1+0\cdot0+1\cdot1 \\ 1\cdot2+2\cdot3+1\cdot5 & 1\cdot0+2\cdot0+1\cdot1 & 1\cdot1+2\cdot0+1\cdot1 \\ 1\cdot2+1\cdot3+0\cdot5 & 1\cdot0+1\cdot0+0\cdot1 & 1\cdot1+1\cdot0+0\cdot1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 13 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Demostrar que: $A^2 - A - 2I = 0$, siendo: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Sea A la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Hallar A^n, para $n \in \mathbb{N}$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = A^{n-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Por qué matriz hay que premultiplicar (multiplicar por la izquierda) la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ para que resulte la matriz $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+2b & b \\ c+2d & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a+2b=5 \\ b=2 \\ c+2d=6 \\ d=3 \end{cases} \qquad X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

5. Obtener las matrices A y B que verifiquen el sistema: $\begin{cases} 2A+B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ A-3B = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$

Multiplicamos la segunda ecuación por −2 $\begin{cases} 2A+B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ -2A+6B = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{cases}$

Sumamos miembro a miembro $7B = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} \frac{9}{7} & \frac{8}{7} & \frac{6}{7} \\ 0 & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$

Si multiplicamos la primera ecuación por 3 y sumamos miembro a miembro obtenemos: $7A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -7 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad A = \begin{pmatrix} \frac{-1}{7} & \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ -1 & \frac{3}{7} & \frac{-1}{7} \end{pmatrix}$

6. Una fábrica produce dos modelos de lavadoras, A y B, en tres terminaciones: N, L y S. Produce del modelo A: 400 unidades en la terminación N, 200 unidades en la terminación L y 50 unidades en la terminación S. Produce del modelo B: 300 unidades en la terminación N, 100 unidades en la terminación L y 30 unidades en la terminación S. La terminación N lleva 25 horas de taller y 1 hora de administración . La terminación L lleva 30 horas de taller y 1.2 horas de administración . La terminación S lleva 33 horas de taller y 1.3 horas de administración.

1. Representar la información en dos matrices.
2. Hallar una matriz que exprese las horas de taller y de administración empleadas para cada uno de los modelos.

Matriz de producción:

Filas: Modelos A y B Columnas: Terminaciones N, L, S

$$M = \begin{pmatrix} 400 & 200 & 50 \\ 300 & 100 & 30 \end{pmatrix}$$

Matriz de coste en horas:

Filas: Terminaciones N, L, S Columnas: Coste en horas: T, A

$$N = \begin{pmatrix} 25 & 1 \\ 30 & 1.2 \\ 33 & 1.3 \end{pmatrix}$$

Matriz que expresa las horas de taller y de administración para cada uno de los modelos: $M \cdot N = \begin{pmatrix} 400 & 200 & 50 \\ 300 & 100 & 30 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 25 & 1 \\ 30 & 1.2 \\ 33 & 1.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17650 & 705 \\ 11490 & 459 \end{pmatrix}$

7. Calcular el rango de la matriz siguiente: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 7 & 7 \end{pmatrix}$

$F_1 - 2F_2$ $\quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 7 & 7 \end{pmatrix}$

$F_3 - 3F_2$ $\quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

$F_3 + 2F_1$ $\quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Por tanto r(A) =2.

8. Siendo: $A=\begin{pmatrix}1&1\\3&4\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}$. Calcular el valor de X en las siguientes ecuaciones:

1. $XA=B+I$
2. $AX+B=C$
3. $XA+B=2C$
4. $AX+BX=C$
5. $XAB-XC=2C$

1. $XA=B+I$

$$XAA^{-1}=(B+I)A^{-1}$$
$$XI=(B+I)A^{-1}$$
$$X=(B+I)A^{-1}$$

$$X=\begin{pmatrix}9&-2\\-2&1\end{pmatrix}$$

2. $AX+B=C$

$$AX=C-B$$
$$A^{-1}AX=A^{-1}(C-B)$$
$$IX=A^{-1}(C-B)$$
$$X=A^{-1}(C-B)$$

$$X=\begin{pmatrix}-4&2\\3&-1\end{pmatrix}$$

3. $XA+B=2C$

$$XAA^{-1}=(2C-B)A^{-1}$$
$$XI=(2C-B)A^{-1}$$
$$X=(2C-B)A^{-1}$$

$$X=\begin{pmatrix}-9&3\\-11&4\end{pmatrix}$$

4. $AX+BX=C$

$$(A+B)X=C$$
$$(A+B)^{-1}(A+B)X=(A+B)^{-1}C$$
$$IX=(A+B)^{-1}C$$
$$X=(A+B)^{-1}C$$

$$X=\begin{pmatrix}\frac{3}{7}&\frac{4}{7}\\\frac{-1}{7}&\frac{1}{7}\end{pmatrix}$$

9. $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}a&a+b\\c&c+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+c&b+d\\c&d\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}a=a+c\\a+b=b+d\\c=c\\c+d=d\end{cases}\Leftrightarrow\begin{matrix}c=0\\a=d\end{matrix}\qquad X=\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}$$

10. Resolver; en forma matricial, el sistema: $\begin{cases}x+y+z=6\\x+2y+5z=12\\x+4y+25z=36\end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 36 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} &A \cdot X = C \\ &A^{-1}A \cdot X = A^{-1}C \\ &I \cdot X = A^{-1}C \\ &X = A^{-1}C \end{aligned}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 30 & -21 & 3 \\ -20 & 24 & -4 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 30 & -21 & 3 \\ -20 & 24 & -4 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 36 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 36 \\ 24 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad x = 3 \qquad y = 2 \qquad z = 1$$

11. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

Justificar si son posibles los siguientes productos:

1. $(A^t \cdot B) \cdot C$

   $(A^t_{3 \times 2} \cdot B_{2 \times 2}) \cdot C_{3 \times 2} = (A^t \cdot B)_{3 \times 2} \cdot C_{3 \times 2}$

   No se puede efectuar el producto porque el número de columnas de $(A^t \cdot B)$ no coincide con el nº de filas de C.

2. $(B \cdot C^t) \cdot A^t$

   $(B_{2 \times 2} \cdot C^t_{2 \times 3}) \cdot A^t_{3 \times 2} = (B \cdot C)_{2 \times 3} \cdot A^t_{3 \times 2} = (B \cdot C^t \cdot A^t)_{2 \times 2}$

3. Determinar la dimensión de M para que pueda efectuarse el producto $A \cdot M \cdot C$

   $A_{3 \times 2} \cdot M_{m \times n} \cdot C_{3 \times 2}$ $\qquad m = 2$

4. Determina la dimensión de M para que $C^t \cdot M$ sea una matriz cuadrada.

   $C^t_{2 \times 3} \cdot M_{m \times n}$ $\qquad m = 3 \quad n = 3$

12. Sean las matrices: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Efectuar las siguientes operaciones: $(A + B)^2$; $\quad (A - B)^2$; $\quad (B)^3$; $\quad A \cdot B^t \cdot C$.

$$A+B=\begin{pmatrix}0&-1&2\\-1&1&1\\3&0&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&-1&2\\3&0&2\\0&-1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-2&4\\2&1&3\\3&-1&8\end{pmatrix}$$

$$(A+B)^2=\begin{pmatrix}4&-2&4\\2&1&3\\3&-1&8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4&-2&4\\2&1&3\\3&-1&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}24&-14&42\\19&-6&35\\34&-15&73\end{pmatrix}$$

$$A-B=\begin{pmatrix}0&-1&2\\-1&1&1\\3&0&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&-1&2\\3&0&2\\0&-1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&0&0\\-4&1&-1\\3&1&0\end{pmatrix}$$

$$(A-B)^2=\begin{pmatrix}-4&0&0\\-4&1&-1\\3&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4&0&0\\-4&1&-1\\3&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16&0&0\\9&0&-1\\-16&1&-1\end{pmatrix}$$

$$B^3=\begin{pmatrix}4&-1&2\\3&0&2\\0&-1&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4&-1&2\\3&0&2\\0&-1&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4&-1&2\\3&0&2\\0&-1&4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}13&-6&14\\12&-5&14\\-3&-4&14\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4&-1&2\\3&0&2\\0&-1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}34&-27&70\\33&-26&70\\-24&-11&42\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B^t\cdot C=\begin{pmatrix}0&-1&2\\-1&1&1\\3&0&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4&3&0\\-1&0&-1\\2&2&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&-1\\-2&0&3\\4&2&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}5&4&9\\-3&-1&3\\20&17&16\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&-1\\-2&0&3\\4&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}28&23&16\\14&3&3\\30&52&47\end{pmatrix}$$

13. Una empresa de muebles fabrica tres modelos de estanterías: A, B y C. En cada uno de los tamaños, grande y pequeño. Produce diariamente 1000 estanterías grandes y 8000 pequeñas de tipo A, 8000 grandes y 6000 pequeñas de tipo B, y 4000 grandes y 6000 pequeñas de tipo C. Cada estantería grande lleva 16 tornillos y 6 soportes, y cada estantería pequeña lleva 12 tornillos y 4 soportes, en cualquiera de los tres modelos.

1. Representar esta información en dos matrices.

Matriz de los tipos de las estanterías:

Filas: Modelos A, B, C Columnas: Tipos G, P

$$M=\begin{pmatrix}1000&8000\\8000&6000\\4000&6000\end{pmatrix}$$

Matriz de los elementos de las estanterías:

Filas: Tipos G, P Columnas: T, S

$$N = \begin{pmatrix} 16 & 6 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Hallar una matriz que represente la cantidad de tornillos y de soportes necesarios para la producción diaria de cada uno de los seis modelos−tamaño de estantería.

Matriz que expresa el número de tornillos y soportes para cada modelo de estantería:

$$M \cdot N = \begin{pmatrix} 1000 & 8000 \\ 8000 & 6000 \\ 4000 & 6000 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 16 & 6 \\ 12 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 112000 & 38000 \\ 200000 & 72000 \\ 136000 & 48000 \end{pmatrix}$$

14. $A\,X + 2\,B = 3\,C$

$$A\,X = 3\,C - 2\,B$$
$$A^{-1}A\,X = A^{-1}(3\,C - 2\,B)$$
$$I\,X = A^{-1}(3\,C - 2\,B)$$
$$X = A^{-1}(3\,C - 2\,B)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \left[3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -5 & 5 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

15. Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

Resolver la ecuación: $A \cdot X = B$

$|A| = 1 \neq 0$, existe la matriz inversa A^{-1}.

$X = A^{-1} \cdot B$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 17 \\ 1 & -11 \end{pmatrix}$$

16. Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Resolver la ecuación: $X \cdot A + B = C$

$\mathbf{|A| = 1 \neq 0}$

$\mathbf{X \cdot A = C - B}$ $\mathbf{X = (C - B) \cdot A^{-1}}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

17. Siendo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Calcular el valor de X en las siguientes ecuaciones:

1. $XA = B + I$

$$X = (B + I)A^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. $AX + B = C$

$$X = A^{-1}(C - B)$$

$$X = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

3. $XA + B = 2C$

$$X = (2C - B)A^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ -11 & 4 \end{pmatrix}$$

4. $AX + BX = C$

$$(A + B)X = C$$

$$X = (A + B)^{-1}C$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{-1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

5. $XAB - XC = 2C$

$$X(AB - C) = 2C$$

$$X = 2C(AB - C)^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{-7}{2} & 1 \\ \frac{-23}{4} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

18. Siendo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Resolver la ecuación matricial: $AX + 2B = 3C$

$$AX = 3C - 2B \; ; \qquad X = A^{-1}(3C - 2B) \; ; \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\left[3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \qquad = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -5 & 5 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

19. Resolver las siguientes ecuaciones sin desarrollar los determinantes.

1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x^2 \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x^2 \end{vmatrix} \xrightarrow[f_3-f_1]{f_2-f_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x^2-1 \end{vmatrix} = 0$$

$(x-1)(x^2-1) = 0$ $\quad x = 1$, $x = -1$

2. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & x & c \\ a & b & x \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & x & c \\ a & b & x \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & x & c \\ 1 & b & x \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & b-x & 0 \\ 0 & 0 & c-x \end{vmatrix}$$

$= a(b-x)(c-x) = 0$ $\quad x = b$, $x = c$

20. ¿Para qué valores de *m* la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ m & 0 & -1 \\ 6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ no admite matriz inversa?

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ m & 0 & -1 \\ 6 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - m^2 - 6 - 0 - 1 - 0 = -m^2 - 7$$

$-m^2 - 7 = 0 \qquad m = \pm\sqrt{-7} \notin \mathbb{R}$

Para cualquier valor real de *m* existe la matriz inversa A^{-1}.

21. Para qué valores de *x* la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & x & x \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ no admite matriz inversa?

$A = \begin{vmatrix} 3 & x & x \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = x$. Para $x = 0$ la matriz A no tiene inversa.

22. Calcular por el método de Gauss el rango de la matriz siguiente: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 7 & 7 \end{pmatrix}$

$F_1 - 2F_2$: $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 7 & 7 \end{pmatrix}$; $F_3 - 3F_2$: $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$;

$F_3 + 2F_1$: $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Por tanto r(A) = 2.

23. Calcular por determinantes el rango de la matriz: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \\ 3 & 5 & 1 & 9 \end{pmatrix}$

$|2| = 2 \neq 0 : r(A) \geq 1$; $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$; $r(A) \geq 2$;

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 3 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 6 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \\ 9 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 ; \qquad r(A) = 2.$$

24. Demostrar, sin desarrollar, que los siguientes determinantes valen cero:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} a & 3a & 4a \\ a & 5a & 6a \\ a & 7a & 8a \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} \xrightarrow{C_3+C_2} \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Tiene dos líneas iguales.

$$B = \begin{vmatrix} a & 3a & 4a \\ a & 5a & 6a \\ a & 7a & 8a \end{vmatrix} = 0$$

La tercera columna es igual a la suma de las otras dos.

25. Sabiendo que |A| = 5, calcula los otros determinantes.

$$A = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \qquad B = \begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad C = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x+3 & 3y & 3z+2 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

$$C=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x+3 & 3y & 3z+2 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} \xrightarrow[f_3-f_1]{f_2-3f_1} \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

26. Resolver las siguientes ecuaciones sin desarrollar los determinantes.

1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x^2 \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x^2 \end{vmatrix} \xrightarrow[f_3-f_1]{f_2-f_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x^2-1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1)(x^2-1)=0 \qquad \begin{matrix} x=1 \\ x=-1 \end{matrix}$$

2. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & x & c \\ a & b & x \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & x & c \\ a & b & x \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & x & c \\ 1 & b & x \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & b-x & 0 \\ 0 & 0 & c-x \end{vmatrix}$$

$$= a(b-x)(c-x) = 0 \qquad \begin{matrix} x=b \\ x=c \end{matrix}$$

27. Aplicando las propiedades de los determinantes, calcular:

$$A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \qquad B=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad C=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & a+3 & b+4 \\ 2 & c+3 & d+4 \end{vmatrix}$$

$$A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \xrightarrow[f_3-f_2]{f_2-f_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$B=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1 = 1$$

$$C=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & a+3 & b+4 \\ 2 & c+3 & d+4 \end{vmatrix} = \xrightarrow[f_3-f_1]{f_2-f_1} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 2(ad-bc)$$

28. Si el valor del determinante $A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix} = 25$, calcular el valor de:

$$B = \begin{vmatrix} 2a & 2c & 2b \\ 2u & 2w & 2v \\ 2p & 2r & 2q \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} 2a & 2c & 2b \\ 2u & 2w & 2v \\ 2p & 2r & 2q \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \begin{vmatrix} a & c & b \\ u & w & v \\ p & r & q \end{vmatrix} = c_2 \to c_3 \; -8 \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ p & q & r \end{vmatrix} =$$

$$f_2 \to f_3 \; = 8 \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix} = 8 \cdot 25 = 200$$

29.