Ejercicios de Funciones: Monotonía, curvatura, parámetros.

1. Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las funciones siguientes:

1. $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+x-2}$

$x^2+x-2=0 \qquad x=-2 \qquad x=1$

$D=\mathbb{R}-\{-2,1\}$

$$f'(x)=\frac{x^2+x-2-(x+1)(2x+1)}{(x^2+x-2)^2}=\frac{-(x^2+2x+3)}{(x^2+x-2)^2}$$

$$\frac{-(x^2+2x+3)}{(x^2+x-2)^2}=0 \qquad x^2+2x+3=0$$

Sin soluciones en $\mathbb{R}$

x	$(-\infty,-2)$	$(-2,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$-$		
	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$

Decreciente: $\mathbb{R}-\{-2,1\}$

2. $f(x)=\sqrt{x+1}$

$x+1\geq 0 \qquad x\geq -1 \qquad D=[-1,\infty)$

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$

x	$(-1,\infty)$
$f'(x)$	$+$
	$\nearrow$

Creciente: $(-1,\infty)$

3. $f(x)=e^{-(x-1)^2}$

$f'(x)=-2(x-1)e^{-(x-1)^2} \qquad -2(x-1)e^{-(x-1)^2}=0 \qquad x=1$

x	$(-\infty,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
	$\nearrow$	$\searrow$

Creciente: $(-\infty,1)$ Decreciente: $(1,\infty)$

4. $f(x)=x\cdot\ln x$

$x>0 \qquad D=(0,\infty)$

$$f'(x)=\ln x+x\frac{1}{x}=\ln x+1$$

$\ln x + 1 = 0 \qquad \ln x = -1 \qquad x = e^{-1}$

x	$(0, e^{-1})$	(e^{-1}, ∞)
$f'(x)$	$-$	$+$
	$\searrow$	$\nearrow$

Creciente: (e^{-1}, ∞) Decreciente: $(0, e^{-1})$

2. Calcula los máximos y mínimos de las funciones siguientes:

1. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 3$

$f'(x) = 4x^3 - 16x \qquad 4x^3 - 16x = 0$

$x = -2 \qquad x = 0 \qquad x = 2$

$f''(x) = 12x^2 - 16$

$f''(-2) = 12(-2)^2 - 16 > 0$ Mínimo $(-2, -13)$

$f''(0) = 12(0)^2 - 16 < 0$ Máximo $(0, 3)$

$f''(2) = 12(2)^2 - 16 > 0$ Mínimo $(2, -13)$

2. $f(x) = e^x(2x^2 + x - 8)$

$f'(x) = e^x(2x^2 + x - 8) + e^x(4x + 1) = e^x(2x^2 + 5x - 7)$

$e^x(2x^2 + 5x - 7) = 0 \qquad x = 1 \qquad x = -\frac{7}{2}$

$f''(x) = e^x(2x^2 + 9x - 2)$

$f''(1) = e^1(2 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 - 2) > 0 \qquad f(1) = -5e$

Mínimo $(1, -5e)$

$f''\left(-\frac{7}{2}\right) = e^{-\frac{7}{2}}\left(2 \cdot \left(-\frac{7}{2}\right)^2 + 9 \cdot \left(-\frac{7}{2}\right) - 2\right) < 0 \qquad f\left(-\frac{7}{2}\right) = 13e^{-\frac{7}{2}}$

Máximo $\left(-\frac{7}{2}, 13e^{-\frac{7}{2}}\right)$

3. $f(x) = x + \ln(x^2 - 1)$

$x^2 - 1 > 0 \qquad x^2 - 1 = 0 \qquad x = \pm 1$

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
	$+$	$-$	$+$

$D = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

$f'(x) = 1 + \frac{2x}{x^2 - 1} = \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1}$

$\frac{x^2+2x-1}{x^2-1}=0 \qquad x=-1+\sqrt{2}\notin D \qquad x=-1-\sqrt{2}$

$f''(x)=\frac{-2\left(x^2+1\right)}{\left(x^2-1\right)^2} \qquad f''(-1-\sqrt{2})=\frac{-2\left((-1-\sqrt{2})^2+1\right)}{\left((-1-\sqrt{2})^2-1\right)^2}<0$

En $x=-1-\sqrt{2}$ hay un máximo

4 $f(x)=\text{sen } 2x$

$f'(x)=2\cos 2x \qquad 2\cos 2x=0$

$2x=\frac{\pi}{2}+2\pi k \qquad x_1=\frac{\pi}{4}+k\pi$

$2x=\frac{3\pi}{2}+2\pi k \qquad x_1=\frac{3\pi}{4}+k\pi$

$f''(x)=-4\,\text{sen } 2x$

$f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-4\,\text{sen } 2\left(\frac{\pi}{4}\right)<0 \qquad f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\text{sen } 2\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$

Máximo $\left(\frac{\pi}{4}+k\pi,1\right)$

$f''\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-4\,\text{sen } 2\left(\frac{3\pi}{4}\right)>0 \qquad f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\text{sen } 2\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-1$

Mínimo $\left(\frac{3\pi}{4}+k\pi,-1\right)$

3. Hallar los intervalos de concavidad y convexidad, y los puntos de inflexión de las funciones:

1. $f(x)=x^3-6x^2+11$

$f'(x)=3x^2-12x$

$f''(x)=6x-12 \qquad 6x-12=0 \qquad x=2$

x	$(-\infty,2)$	$(2,\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
	$\cap$	$\cup$

Cóncava: $(2,\infty)$ Convexa: $(-\infty,2)$

$f'''(x)=6>0$

Punto de inflexión $(2,-5)$

2. $f(x)=x^4-6x^2+4$

$f'(x)=4x^3-12x$

$f''(x) = 12x^2 - 12$

$12x^2 - 12 = 0$ $\qquad x = \pm 1$

$f'''(x) = 24x$

$f'''(1) = 24 \cdot 1 \neq 0$ $\qquad f(1) = 1^4 - 6 \cdot 1^2 + 4 = -1$

$f'''(-1) = 24(-1) \neq 0$ $\qquad f(-1) = (-1)^4 - 6 \cdot (-1)^2 + 4 = -1$

Puntos de inflexión: $(1,-1)$, $(-1,-1)$

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
	$\cup$	$\cap$	$\cup$

Cóncava: $(-\infty,-1) \cup (1,\infty)$ $\qquad$ Convexa: $(-1,1)$

3. $f(x) = e^{-x^2}$

$f'(x) = -2x\,e^{-x^2}$

$f''(x) = -2e^{-x^2} - 2x\,e^{-x^2}(-2x) = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$

$2e^{-x^2}(2x^2 - 1) = 0$ $\qquad x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

$f''' = -4x \cdot e^{-x^2}(2x^2 - 1) + 2e^{-x^2} \cdot 4x = -4x \cdot e^{-x^2}(2x^2 - 3)$

$f'''\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \neq 0$ $\qquad f'''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \neq 0$

Puntos de inflexión: $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$ $\quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$

x	$\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\infty\right)$
$f'''(x)$	$+$	$-$	$+$
	$\cup$	$\cap$	$\cup$

Cóncava: $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2},\infty\right)$ $\qquad$ Convexa: $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

4. Supongamos que el rendimiento r en % de un alumno en un examen de una hora viene dado por:

r = 300t (1−t). Donde 0 < t < 1 es el tiempo en horas. Se pide:

1. ¿En qué momentos aumenta o disminuye el rendimiento?

$r = 300t - 300t^2$

$r' = 300 - 600t$ $\qquad 300 - 600t = 0$ $\qquad t = ½$

t	$\left(0,\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2},1\right)$
$f'(t)$	+	−
	↗	↘

Creciente: $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ Decreciente: $\left(\frac{1}{2},1\right)$

2. ¿En qué momentos el rendimiento es nulo?

$300t\,(1-t)=0 \qquad t=0 \quad t=1$

El rendimiento es nulo al empezar (t = 0) y al acabar el examen (t = 1).

3 ¿Cuando se obtiene el mayor rendimiento y cuál es?

$r(\frac{1}{2})=300(\frac{1}{2})-300(\frac{1}{2})^2=75$

Rendimiento máximo: (½, 75)

5. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función:

$$f(x)=x+\frac{4}{x}$$

$$D=\mathbb{R}-\{0\}$$

$$f'(x)=1-\frac{4}{x^2} \qquad 1-\frac{4}{x^2}=0 \qquad x=1 \qquad x=2$$

x	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
$f'(x)$	+	−	−	+
	↗	↘	↘	↗

Creciente: $(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$ Decreciente: $(-2,0)\cup(0,2)$

6. Hallar los máximos y mínimos de la función:

$$f(x)=\frac{x^2-x-2}{x^2-6x+9}$$

$$f(x)=\frac{x^2-x-2}{x^2-6x+9}=\frac{x^2-x-2}{(x-3)^2}$$

$$f'(x)=\frac{(2x-1)(x-3)^2-(x^2-x-2)2(x-3)}{(x-3)^4}=\frac{-5x+7}{(x-3)^3}$$

$$\frac{-5x+7}{(x-3)^3}=0 \qquad -5x+7=0 \qquad x=\frac{7}{5}$$

$$f''(x)=\frac{10x-6}{(x-3)^4} \qquad f''\left(\frac{7}{5}\right)=\frac{10\left(\frac{7}{5}\right)-6}{\left(\left(\frac{7}{5}\right)-3\right)^4}>0$$

$$f(x)=\frac{\left(\frac{7}{5}\right)^2-\left(\frac{7}{5}\right)-2}{\left(\frac{7}{5}\right)^2-6\left(\frac{7}{5}\right)+9}=-\frac{9}{16} \qquad \text{Mínimo}\left(\frac{7}{5},-\frac{9}{16}\right)$$

7. Determina las ecuaciones de la tangente y normal en su punto de inflexión a la curva:

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 7x + 1$.

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 7$

$f''(x) = 6x - 6$

$6x - 6 = 0 \qquad x = 1$

$f'''(x) = 12 \qquad f'''(1) \neq 0 \qquad f(1) = 6$

Punto de inflexión: (1, 6)

$m_t = f'(1) = 4 \qquad m_n = -1/4$

Recta tangente: $y - 6 = 4(x - 1) \qquad 4x - y + 2 = 0$

Recta normal: $y - 6 = -1/4(x - 1) \qquad x + 4y - 25 = 0$

8. La cantidad (y) expresa el dinero acumulado en una máquina tragaperras durante un día y sigue una ley del tipo: $y = 1/3\, x^3 - 19x^2 + 352x + 100$

donde la variable x representa el tiempo en horas (de 0 a 24). Responde a las siguientes preguntas:

1. ¿Se queda alguna vez vacía de dinero la máquina?

Entre 0 y 24 la función es distinta de cero, por lo cual la máquina siempre tiene monedas.

Hay un mínimo absoluto en (0, 100).

2. Si se realiza la "caja" a las 24 horas. ¿Arroja ganancias para los dueños de la máquina?

Ganancia: $f(24) - f(0) = 2212 - 100 = 2112$

3. ¿A qué hora la recaudación es máxima y a qué hora es mínima?

$f'(x) = x^2 - 38x + 352 \qquad x^2 - 38x + 352 = 0$

$x = 16 \qquad x = 22$

$f''(x) = 2x - 38$

$f''(16) = 32 - 38 < 0 \qquad$ Máximo (16, 6700/3)

$f''(22) = 44 - 38 > 0 \qquad$ Mínimo (22, 6592/3)

4. ¿Cuándo entrega el mayor premio?

El mayor premio será igual al punto de inflexión.

$f'''(x) = 2$

$2x - 38 = 0 \qquad x = 19$

9. Sea $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 7$. Hallar a y b de manera que la gráfica de la función f(x) tenga para x = 1 una inflexión, y cuya recta tangente en ese punto forme un ángulo de 45° con el eje OX.

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \qquad f''(x) = 6x + 2a$

$f'(1) = 1 \qquad 3 + 2a + b = 1$

$f''(1) = 0 \qquad 6 + 2a = 0$

$a = -3 \qquad b = 4$

10. Obtener la ecuación de la tangente a la gráfica de $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4$ en su punto de inflexión.

$f'(x) = 6x^2 - 12x \qquad f''(x) = 12x - 121$

$2x - 12 = 0 \qquad x = 1$

$f'''(x) = 12 \qquad f'''(1) \neq 0 \qquad f(1) = 0$

Punto de inflexión: (1, 0)

$f'(1) = 6 - 12 = -6 = m$

$y - 0 = -6(x - 1) \qquad y = -6x + 6$

11. Determinar a, b y c para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tenga un máximo para $x = -4$, un mínimo, para $x = 0$ y tome el valor 1 para $x = 1$.

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \qquad f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$1 = 1 + a + b + c \qquad a + b + c = 0$

$0 = 48 - 8a + b \qquad 8a - b = 48$

$0 = 0 - 0 + b \qquad b = 0$

$a = 6 \qquad b = 0 \qquad c = -6$

12. Determinar el valor de a, b, c y d para que la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un máximo en (0, 4) y un mínimo en (2, 0).

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f(0) = 4 \qquad d = 4$

$f(2) = 0 \qquad 8a + 4b + 2c = 0$

$f'(0) = 0 \qquad c = 0$

$f'(2) = 0 \qquad 12a + 4b + c = 0$

$a = 1 \qquad b = -3 \qquad c = 0 \qquad d = 4$

13. Determinar a, b, c, d y e, de modo que la curva $f(x) = ax^4 + bx^3 + c\,x^2 + dx + e$, tenga un punto crítico en (1, 3) y un punto de inflexión con tangente de ecuación y = 2x en (0, 0).

$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d \qquad f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$

$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d \qquad f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$

$f(1) = 3a + b + c + d = 3$

$f(0) = 0 \qquad e = 0$

$f'(1) = 3 \qquad 4a + 3b + 2c + d = 3$

$f'(0) = 2 \qquad d = 2$

$f''(0) = 0 \qquad 2c = 0$

$a = -5 \qquad b = 6 \qquad c = 0 \qquad d = 2 \qquad e = 0$

14. La curva $f(x) = x^3 + a\,x^2 + b\,x + c$ corta al eje de abscisas en x = 3 y tiene un punto de inflexión en (2/3, 1/9). Hallar a, b y c.

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \qquad f''(x) = 6x + 2a$$

$$f(3) = 0 \qquad 27 + 9a + 3b + c = 0$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{9} \qquad \frac{8}{27} + \frac{4}{9}a + \frac{2}{3}b + c = \frac{1}{9}$$

$$f''\left(\frac{2}{3}\right) = 0 \qquad 6 \cdot \frac{2}{3} + 2a = 0$$

$$a = -2 \qquad b = -\frac{262}{63} \qquad c = \frac{27}{21}$$

15. Dada la función: $f(x) = \dfrac{x^2 + ax + b}{x^2 + ax + c}$

Calcula a, b y c, de modo que f(x) tenga en (2, −1) un extremo local y que la curva pase por el origen de coordenadas.

$$f'(x) = \frac{(2x + a)(x^2 + ax + c) - (x^2 + ax + b)(2x + a)}{(x^2 + ax + c)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x + a)(b - c)}{(x^2 + ax + c)^2}$$

$$f(2) = -1 \qquad \frac{2^2 + a \cdot 2 + b}{2^2 + a \cdot 2 + c} = -1$$

$$f(0) = 0 \qquad \frac{b}{c} = 0$$

$$f'(2) = 0 \qquad \frac{(2 \cdot 2 + a)(b - c)}{(2^2 + a \cdot 2 + c)^2} = 0$$

$$a = -4 \qquad b = 0 \qquad c = 8$$