Ejercicios de Funciones: derivadas y derivabilidad

1. Calcular las derivadas en los puntos que se indica:

1. $f(x)=2x^2-6x+5$, en x = −5.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{2(x+h)^2-6(x+h)+5-\left(2x^2-6x+5\right)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2x^2+4xh+2h^2-6x-6h+5-2x^2+6x-5}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{4xh-6h+2h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(4x-6+2h)}{h}=4x-6$$

$$f'(-5)=4(-5)-6=-26$$

2. $f(x)=x^3+2x-5$, en x = 1.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3+2(x+h)-5-\left(x^3+2x-5\right)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3+2x+2h-5-x^3-2x+5}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3+2h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h\left(3x^2+3xh+h^2+2\right)}{h}=3x^2+2$$

$$f'(1)=3(1)^2+2=5$$

3. $f(x)=\dfrac{1}{x}$, en x = 2.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{x+h}-\dfrac{1}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{-h}{x^2+xh}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(-\frac{1}{x^2+xh}\right)=-\frac{1}{x^2}\;;\quad f'(2)=-\frac{1}{2^2}=-\frac{1}{4}$$

4. $f(x)=\sqrt{x}$, en x = 3.

$$f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{3+h}-\sqrt{3}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{3+h}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3+h}+\sqrt{3}\right)}{h\left(\sqrt{3+h}+\sqrt{3}\right)}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(3+h)-3}{h\left(\sqrt{3+h}+\sqrt{3}\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h\left(\sqrt{3+h}+\sqrt{3}\right)}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{3+h}+\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

2. Dada la curva de ecuación $f(x) = 2x^2 - 3x - 1$, halla las coordenadas de los puntos de dicha curva en los que la tangente forma con el eje OX un ángulo de 45°.

$$f'(x) = tg\ 45^\circ = 1$$

$$1 = \lim_{h\to 0} \frac{2(x+h)^2 - 3(x+h) - 1 - \left(2x^2 - 3x - 1\right)}{h}$$

$$1 = \lim_{h\to 0} \frac{2x^2 + 4xh + 2h^2 - 3x - 3h - 1 - 2x^2 + 3x + 1}{h}$$

$$1 = \lim_{h\to 0} \frac{h(4x + 2h - 3)}{h}$$

$$1 = 4x - 3 \qquad\qquad x = 1$$

$$f(1) = 2\cdot 1^2 - 3\cdot 1 - 1 = -2 \qquad\qquad P(1,-2)$$

3. Hallar el punto en que $y = |x + 2|$ no tiene derivada. Justificar el resultado representando su gráfica.

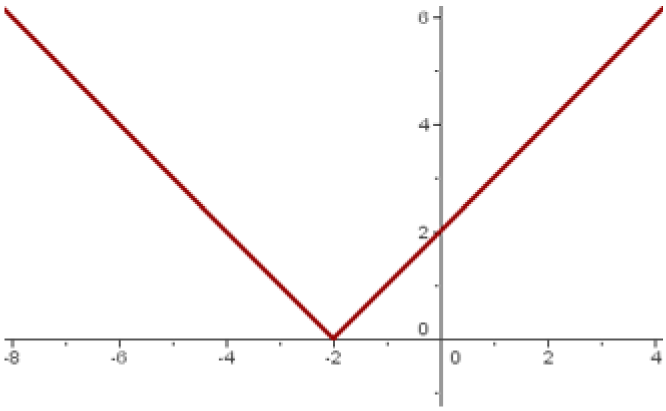
$$f(x) = \begin{cases} -x - 2 & \text{si } x < -2 \\ x + 2 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$$

$$f(-2) = \lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^+} f(x) = 0$$

La función es continua en toda $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -2 \\ 1 & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

$\mathbf{f'(-2)^- = -1 f'(-2)^+ = 1}$. No será derivable en: $x = -2$.



En $x = -2$ hay un pico, por lo que no es derivable en $x = -2$.

4. Hallar los puntos en que $y = |x^2 - 5x + 6|$ no tiene derivada. Justificar el resultado representando su gráfica.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 6 & \text{si } x < 2 \\ -x^2 + 5x - 6 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ x^2 - 5x + 6 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

$$f(2) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = 0$$

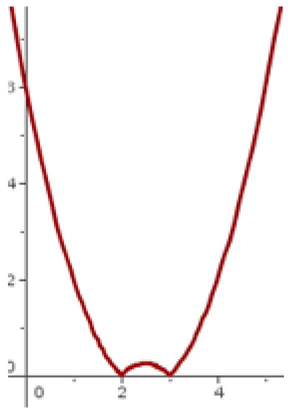
$$f(3)=\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^+} f(x)=0$$

La función es continua en toda $\mathbb{R}$.

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-5 & \text{si } x<2 \\ -2x+5 & si\ 2<x<3 \\ 2x-5 & \text{si } x>3 \end{cases}$$

$f'(2)^- = -1$; $f'(2)^+ = 1$ **$f'(3)^- = -1$; $f'(3)^+ = 1$**

Como no coinciden las derivadas laterales la función no será derivable en: $x = 2$ ni $x = 3$.



Podemos observar que en $x = 2$ y en $x = 3$ tenemos dos puntos angulosos, por lo que la función no será derivable en ellos.

5. Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función definida por:

$$f(x)=\begin{cases} \cos x+2 & si \quad x<0 \\ \dfrac{2x}{\pi}+1 & si \quad 0<x<\dfrac{\pi}{2} \\ sen\, x+1 & si \quad x\geq\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

La función no es continua en $x = 0$ porque no tiene imagen. Por tanto tampoco es derivable.

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=sen\,\frac{\pi}{2}+1=2 \qquad \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\frac{2x}{\pi}+1=\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} sen\,\frac{\pi}{2}+1=2$$

Por lo que es continua, veamos si es derivable

$$f'(x)=\begin{cases} -sen\,x & si \quad x<0 \\ \dfrac{2}{\pi} & si \quad 0<x<\dfrac{\pi}{2} \\ \cos x & si \quad x>\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)^-=\frac{2}{\pi} \qquad f'\left(\frac{\pi}{2}\right)^+=\cos\frac{\pi}{2}=0$$

Como las derivadas laterales no coinciden no es derivable en el punto.

6. Dada la función: $f(x)=\begin{cases}3-ax^2 & si \quad x\leq 1\\ \dfrac{2}{ax} & si \quad x>1\end{cases}$ ¿Para qué valores de ***a*** es derivable?

Continuidad en $x=1$

$f(1)=3-a$

$\lim_{x\to 1^-}\left(3-ax^2\right)=3-a \qquad \lim_{x\to 1^+}\left(\dfrac{2}{ax}\right)=\dfrac{2}{a}$

$3-a=\dfrac{2}{a} \qquad a^2-3a-2=0$

$a=1 \qquad a=2$; Continua para a = 1 y a = 2.

$$f'(x)=\begin{cases}-2ax & \text{si} \quad x<1\\ \dfrac{-2}{ax^2} & \text{si} \quad x>1\end{cases}$$

$f'(1^-)=-2a \qquad f'(1^+)=\dfrac{-2}{a}$

$-2a=\dfrac{-2}{a} \qquad a^2=1 \qquad a=\pm 1$

Derivable para $a=1$

Para $a=-1$ no es continua, tampoco es derivable.

7. Estudiar para qué valores de a y b la función es continua y derivable:

$$f(x)=\begin{cases}x^3-x & \text{si} \quad x<0\\ ax+b & \text{si} \quad x\geq 0\end{cases}$$

$f(0)=b \qquad \lim_{x\to 0^-}\left(x^3-x\right)=0 \qquad \lim_{x\to 0^+}\left(ax+b\right)=b$

$b=0$

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2-1 & \text{si} \quad x<0\\ a & \text{si} \quad x>0\end{cases}$$

$f'(0^-)=-1 \quad f'(0^+)=a$

$a=-1$

8. Determinar los valores de a y b para que la siguiente función sea derivable en todos sus puntos:

$$f(x)=\begin{cases}bx^2+ax & Si \quad x\leq -1\\ \dfrac{a}{x} & Si \quad -1<x\leq 1\\ \dfrac{x^2+ax+1}{x+1} & Si \quad x>1\end{cases}$$

Para qué una función sea derivable tiene que ser continua. En este caso la función no es continua para x = 0 cualesquiera que sean a y b, es decir, no existen valores de a y b que hagan continua la función.

Por tanto, no existen valores de a y b para los cuales la función sea derivable.

9. Calcula el valor de la derivada $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ en x = 2.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{x+h}{x+h-1} - \dfrac{x}{x-1}}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{x^2 - x + hx - h - x^2 - hx + x}{(x+h-1)(x-1)}}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{-h}{(x+h-1)(x-1)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(x+h-1)(x-1)} = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

$$f'(2) = \frac{-1}{(2-1)^2} = -1$$

10. Hallar los puntos en que y = 250 − |x² −1| no tiene derivada.

$x^2 - 1 = 0 \qquad x = \pm 1$

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f(x)$	+	−	+

$$f(x) = \begin{cases} 250 - (x^2 - 1) & \text{si} \quad x < -1 \\ 250 + (x^2 - 1) & \text{si} \quad -1 \le x < 1 \\ 250 - (x^2 - 1) & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

$$f(-1) = 250 + (1^2 - 1) = 250$$

$$\lim_{x\to -1^-} 250 - (x^2 - 1) = 250 \qquad \lim_{x\to -1^+} 250 + (x^2 - 1) = 250$$

$$f(1) = 250 - (1^2 - 1) = 250$$

$$\lim_{x\to 1^-} 250 + (x^2 - 1) = 250 \qquad \lim_{x\to 1^+} 250 - (x^2 - 1) = 250$$

La función es continua en toda $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si} \quad x < -1 \\ 2x & \text{si} \quad -1 \le x < 1 \\ -2x & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

$$f'(-1^-) = 2 \qquad f'(-1^+) = -2$$

$f'(1^-)=2 \qquad f'(1^+)=-2$

Como no coinciden las derivadas laterales la función no será derivable en: x = −1 y x = 1.

11. Estudiar para qué valores de a y b la función es continua y derivable:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2 & si \quad x\le 0 \\ \sqrt{ax+b} & si \quad 0<x\le 2 \\ \dfrac{-x}{2\sqrt{2}}+\dfrac{3}{\sqrt{2}} & si \quad x>2 \end{cases}$$

$f(0)=2$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x^2+2\right)=2 \qquad \lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{ax+b}=\sqrt{b}$

$\sqrt{b}=2 \qquad b=4$

$f(2)=\sqrt{2a+4}$

$\lim\limits_{x\to 2^-}\sqrt{2a+b}=\sqrt{2a+4} \qquad \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{-2}{2\sqrt{2}}+\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

$\sqrt{2a+4}=\sqrt{2} \qquad a=-1$

Para $a=-1$ y $b=4$ la función es continua en R

Con estos valores se hace la derivada:

$$(x)=\begin{cases} 2x & si \quad x<0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{-x+4}} & si \quad 0<x<2 \\ \dfrac{-1}{2\sqrt{2}} & si \quad x>2 \end{cases}$$

$f'(0^-)=0 \qquad f'(0^+)=-\dfrac{1}{4}$

No es derivable en $x=0$

$f'(2^-)=\dfrac{-1}{2\sqrt{2}} \qquad f'(2^+)=\dfrac{-1}{2\sqrt{2}}$

Es derivable en $x=2$

12. Determinar los valores del parámetro b, para qué las tangentes a la curva de la función

$$f(x) = b^2x^3 + bx^2 + 3x + 9$$

en los puntos de abscisas x = 1, x = 2 sean paralelas.

$f'(x) = 3b^2x^2 + 2bx + 3$

$f'(1) = 3b^2 + 2b + 3 \qquad f'(2) = 12b^2 + 4b + 3$

Se igualan las derivadas y se resuelve la ecuación: b = 0 ó b = 2/9.

13. Calcula mediante la fórmula de la derivada de una raíz:

1. $f(x)=\sqrt{x^2-2x+3}$

$$f'(x)=\frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+3}}=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}}$$

2. $f(x)=\sqrt[4]{x^5-x^3-2}$

$$f'(x)=\frac{5x^4-3x^2}{4\sqrt[4]{\left(x^5-x^3-2\right)^3}}$$

3. $f(x)=\sqrt[3]{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$

$$f'(x)=\frac{\frac{2x\left(x^2-1\right)-\left(x^2+1\right)2x}{\left(x^2-1\right)^2}}{3\sqrt[3]{\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^2}}=$$

$$=\frac{\frac{-4x}{\left(x^2-1\right)^2}}{3\sqrt[3]{\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^2}}=\frac{-4x}{3\left(x^2-1\right)^2\sqrt[3]{\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^2}}=$$

$$\frac{-4x}{3\sqrt[3]{\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^2\left(x^2-1\right)^6}}=\frac{-4x}{3\sqrt[3]{\left(x^2+1\right)^2\left(x^2-1\right)^4}}=$$

$$=\frac{-4x}{3\sqrt[3]{\left(x^4-1\right)^2\left(x^2-1\right)^2}}$$

14. Deriva las funciones exponenciales:

1. $f(x)=10^{\sqrt{x}}$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot 10^{\sqrt{x}}\cdot \ln 10$$

2. $f(x)=e^{3-x^2}$

$$f'(x)=-2x\cdot e^{3-x^2}$$

3. $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

$$f'(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

4. $f(x)=3^{2x^2}\cdot\sqrt{x}$

$$f^{-1}(x)=4x\cdot 3^{2x^2}\cdot\ln 3\cdot\sqrt{x}+\frac{3^{2x^2}}{2\sqrt{x}}==3^{2x^2}\left(4x\cdot\sqrt{x}\cdot\ln 3+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

5. $f(x)=\frac{e^{2x}}{x^2}$

$$f'(x)=\frac{2\cdot e^{2x}\cdot x^2-e^{2x}\cdot 2x}{x^4}=\frac{2x\cdot e^{2x}(x-1)}{x^4}==\frac{2\cdot e^{2x}(x-1)}{x^3}$$

15. Calcula la derivada de las funciones logarítmicas:

1. $f(x)=\ln\left(2x^4-x^3+3x^2-3x\right)$

$$f'(x)=\frac{8x^3-3x^2+6x-3}{2x^4-x^3+3x^2-3x}$$

2. $f(x)=\ln\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right)$

Aplicando las propiedades de los logarítmos obtenemos:

$$f(x)=\ln\left(e^x+1\right)-\ln\left(e^x-1\right)$$

$$f'(x)=\frac{e^x}{e^x+1}-\frac{e^x}{e^x-1}=\frac{e^{2x}-e^x-e^{2x}-e^x}{\left(e^x+1\right)\left(e^x-1\right)}==\frac{-2e^x}{e^{2x}-1}$$

3. $f(x)=\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

Aplicando las propiedades de los logarítmos obtenemos:

$$f(x)=\frac{1}{2}\left[\log(1+x)-\log(1-x)\right]$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}-\frac{-1}{1-x}\right)\cdot\log e=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-x+1+x}{1-x^2}\cdot\log e=$$

$$=\frac{1}{1-x^2}\cdot\log e$$

4. $f(x)=\ln\sqrt{x(1-x)}$

Aplicando las propiedades de los logarítmos obtenemos:

$$f(x)=\frac{1}{2}\left[\ln x+\ln(1-x)\right]$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{-1}{1-x}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-x-x}{x(1-x)}==\frac{1-2x}{2x(1-x)}$$

5. $f(x)=\ln\sqrt[3]{\dfrac{3x}{x+2}}$

Aplicando las propiedades de los logarítmos obtenemos:

$$f(x)=\frac{1}{3}\left[\ln 3x-\ln(x+2)\right]$$

$$f'(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{3x}-\frac{1}{x+2}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{x+2-x}{x(x+2)}==\frac{2}{3x(x+2)}$$

16. Calcula la derivada de la funciones trigonométricas:

1 $f(x)=sen\,\dfrac{1}{2}x$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}x$$

2 $f(x)=\cos(7-2x)$

$$f'(x)=-(-2)\cdot sen(7-2x)=2\cdot sen(7-2x)$$

3 $f(x)=3tg2x$

$$f'(x)=6\left(1+tg^2 2x\right)$$

4 $f(x)=\sec(5x+2)$

$$f'(x)=5\;tg(5x+2)\cdot\sec(5x+2)$$

5 $f(x)=\sqrt[3]{senx}$

$$f'(x)=\frac{\cos x}{3\sqrt[3]{sen^2x}}$$

6 $f(x)=sen^3\;3x$

$$f'(x)=3\cdot sen^2\;3x\cdot 3\cdot\cos 3x=9\cdot sen^2\;3x\cdot\cos 3x$$

7 $f(x)=cotg(3-2x)$

$$f'(x)=\frac{2}{sen^2(3-2x)}$$

8 $f(x)=\cos\dfrac{x+1}{x-1}$

$$f'(x) = -\frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} sen \frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{(x-1)^2} \cdot sen \frac{x+1}{x-1}$$

9 $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-senx}{1+senx}}$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1-senx}{1+senx}}} \cdot \frac{-\cos x(1+senx)-(1-senx)\cos x}{(1+senx)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1-senx}{1+senx}}} \cdot \frac{-\cos x - senx \cdot \cos x - \cos x + senx \cdot \cos x}{(1+senx)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1-senx}{1+senx}}} \cdot \frac{-2\cos x}{(1+senx)^2} = \frac{-2\cos x}{2\sqrt{\dfrac{(1-senx)(1+senx)^4}{1+senx}}} =$$

$$= -\frac{\cos x}{\sqrt{(1-senx)(1+senx)^3}} = -\frac{\cos x}{\sqrt{(1-senx)(1+senx)(1+senx)^2}} =$$

$$= -\frac{\cos x}{\sqrt{1-sen^2x} \cdot (1+senx)} = -\frac{\cos x}{\cos x \cdot (1+senx)} =$$

$$= -\frac{1}{1+senx}$$

17. Calcula la derivada de la funciones trigonométricas inversas:

1 $f(x) = arc\ sen\left(1-2x^2\right)$

$$f'(x) = \frac{-4x}{\sqrt{1-\left(1-2x^2\right)^2}}$$

2 $f(x) = arc\ sen\sqrt{x^2-4}$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(x^2-4\right)}} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2-4}} = \frac{x}{\sqrt{5-x^2} \cdot \sqrt{x^2-4}}$$

3 $f(x) = arc\ \cos e^x$

$$f'(x) = -\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$$

4 $f(x) = arc\ tg\sqrt{x}$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}\,\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}\,(1+x)}$$

5 $f(x) = arctg\,\frac{1+x}{1-x}$

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} =$$

$$= \frac{1}{1+\frac{(1+x)^2}{(1-x)^2}}\cdot\frac{2}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2+(1+x)^2} =$$

$$= \frac{2}{1-2x+x^2+1+2x+x^2} = \frac{2}{2+2x^2} == \frac{1}{1+x^2}$$

18. Derivar las funciones:

1 $f(x) = \ln sen\,x$

$$f'(x) = \frac{\cos x}{sen\,x} = cotg\,x$$

2 $f(x) = \ln\,\cos 2x$

$$f'(x) = \frac{-2sen\,2x}{\cos 2x} = -2\,tg\,2x$$

3 $f(x) = \ln\,tg\,(1-x)$

$$f'(x) = -\frac{1+tg^2\,(1-x)}{tg\,(1-x)}$$

4 $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1+sen\,x}{1-sen\,x}}$

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[\ln(1+sen\,x) - \ln(1-sen\,x)\right]$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos x}{1+sen\,x} - \frac{-\cos x}{1-sen\,x}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\cos x - sen\,x\cos x + \cos x + sen\,x\cos x}{1-sen^2\,x} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2\cos x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} = \sec x$$

5 $f(x) = sen\sqrt{\ln(1-3x)}$

$$f'(x)=\cos\sqrt{\ln(1-3x)}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\ln(1-3x)}}\cdot\frac{1}{1-3x}\cdot(-3)$$

6 $f(x)=tg\left(sen\sqrt{5x}\right)$

$$f'(x)=\left[1+tg^2\left(sen\sqrt{5x}\right)\right]\cdot\cos\sqrt{5x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{5x}}\cdot 5$$

7 $f(x)=sen^2(\cos 2x)$

$$f'(x)=2\,sen(\cos 2x)\cdot\cos(\cos 2x)\cdot(-sen\,2x)\cdot 2$$

19. Calcula la derivada de la función logarítmica: $f(x)=\ln\frac{(x-2)^3}{\sqrt{2x-1}}$

Aplicando las propiedades de los logarítmos obtenemos:

$$f(x)=\ln\frac{(x-2)^3}{\sqrt{2x-1}}$$

$$f(x)=\ln(x-2)^3-\ln\sqrt{2x-1}=3\ln(x-2)-\frac{1}{2}\ln(2x-1)$$

$$f'(x)=3\cdot\frac{1}{x-2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2x-1}=\frac{6x-3-x+2}{(x-2)(2x-1)}=$$

$$f'(x)=3\cdot\frac{1}{x-2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2x-1}=\frac{6x-3-x+2}{(x-2)(2x-1)}=$$

$$=\frac{5x-1}{(x-2)(2x-1)}$$

20. Derivar la función: $f(x)=arctg\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$f'(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}-x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{\frac{1-x^2+x^2}{1-x^2}}\cdot\frac{\frac{2\left(1-x^2\right)+2x^2}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=\frac{1}{\frac{1}{1-x^2}}\cdot\frac{\frac{2}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=$$

$$=\left(1-x^2\right)\cdot\frac{1}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}}==\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

21. Derivar: $f(x) = \cos(\cos(\cos x))$

$$f'(x) = -\operatorname{sen}(\cos(\cos x)) \cdot \operatorname{sen}(\cos x) \cdot \operatorname{sen} x$$

22. Calcular los puntos en que la tangente a la curva $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ es paralela al eje OX.

$y' = 3x^2 - 6x - 9$; $\quad x^2 - 2x - 3 = 0$ (simplificando por 3)

$x_1 = 3$, $y_1 = -22$

$x_2 = -1$, $y_2 = 10$

$A(3, -22)$, $B(-1, 10)$

23. Se ha trazado una recta tangente a la curva $y = x^3$, cuya pendiente es 3 y pasa por el punto $(0,-2)$. Hallar el punto de tangencia.

Sea el punto de tangencia $(a, f(a))$

$f'(a) = 3a^2$

$3a^2 = 3$; $a = \pm 1$

Las ecuaciones de la rectas tangentes son:

$a = 1$; $f(a) = 1$; $y - 1 = 3(x - 1)$; $y = 3x - 2$

$a = -1$; $f(a) = -1$; $y + 1 = 3(x + 1)$; $y = 3x + 2$

El punto $(0, -2)$ pertenece a la recta $y = 3x - 2$.

Por tanto el punto de tangencia será $(1, 1)$.

24. Buscar los puntos de la curva $f(x) = x^4 + 7x^3 + 13x^2 + x + 1$, para los cuales la tangente forma un ángulo de 45º con OX.

$m = 1$

$f'(x) = 4x^3 + 21x^2 + 26x + 1$; $\quad 4x^3 + 21x^2 + 26x + 1 = 1$

$x = 0$, $x = -2$, $x = 13/4$; $\quad P(0, 4)$, $Q(-2, 4)$, $R(13/4, 1621/256)$

25. Dada la función $f(x) = \operatorname{tg} x$, hallar el ángulo que forma la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el origen, con el eje de abscisas.

$f'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x \quad f'(0) = 1 = m$

Recta tangente: $y = x$

$\alpha = \operatorname{arc\,tg} 1 = 45º$

26. Calcular la ecuación de la tangente y de la normal a la curva $f(x) = \ln(\operatorname{tg} 2x)$ en el punto de abscisa: $x = \pi/8$.

$$f(x) = \ln \operatorname{tg} 2x \qquad f\left(\frac{\pi}{8}\right) = \ln \operatorname{tg} 2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0$$

$$f'(x) = \frac{2(1 + \operatorname{tg}^2 2x)}{\operatorname{tg} 2x} \qquad f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2\left(1 + \operatorname{tg}^2 2\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)}{\operatorname{tg} 2\left(\frac{\pi}{8}\right)} = 4$$

E. de la tangente:

$$y - 0 = 4\left(x - \frac{\pi}{8}\right) \qquad 4x - y - \frac{\pi}{2} = 0$$

E. de la normal:

$$y - 0 = -\frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{8}\right) \qquad x + 4y - \frac{\pi}{8} = 0$$

27. Hallar los coeficientes de la ecuación $y = ax^2 + bx + c$, sabiendo que su gráfica pasa por (0, 3) y por (2, 1), y en este último punto su tangente tiene de pendiente 3.

Pasa por (0, 3) $3 = c$

Pasa por (2, 1) $1= 4a + 2b + c$

$y' = 2ax + b$ $3 = 4a + b$

Resolviendo el sistema se obtiene: **a = 2** **b = −5** **c = 3**

28. La gráfica de la función $y = ax^2 + bx + c$ pasa por los puntos (2, 3) y (3, 13), siendo la tangente a la misma en el punto de abscisa 1 paralela a la bisectriz del primer cuadrante. Hallar el valor numérico de a, b y c.

Pasa por (2, 3) $3 = 4a + 2b + c$

Pasa por (3, 13) $13 = 9a + 3b + c$

$y' = 2ax + b$ $1 = 2a + b$

Resolviendo el sistema se obtiene: **a = 3** **b = −5** **c =1**

29. Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, determina a, b, c y d; sabiendo que la curva pasa por los puntos (−1, 2) (2, 3), y que las tangentes a ellas en los puntos de abscisa 1 y −2 son paralelas al ejes de abscisas.

$f(-1) = 2$ $-a + b - c + d = 2$

$f(2) = 3$ $8a + 4b + 2c + d = 3$

$f'(-1) = 0$ $3a + 2b + c = 0$

$f'(2) = 0$ $12a - 4b + c = 0$

$a = -2/9$ $b = -1/3$ $c = 4/3$ $d = 31/9$

30. ¿En qué punto de la curva y = ln x, la tangente es paralela a la cuerda que une los puntos (1, 0) y (e, 1)?

La pendiente de la cuerda tiene que ser igual a la derivada de la función.

$$m = \frac{1-0}{e-1} = \frac{1}{e-1} \qquad f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{e-1} = \frac{1}{x} \qquad x = e - 1$$

$$(e-1, \ln(e-1))$$

31. Hallar el área del triángulo determinado por los ejes de coordenadas y la tangente a la curva xy = 1 en el punto x = 1.

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad f(1) = 1$$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ $\qquad f'(1) = -1$

$y - 1 = -x + 1$ $\qquad y = -x + 2$

$A(2,0)$ $\qquad B(0,2)$

$S = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2u^2$