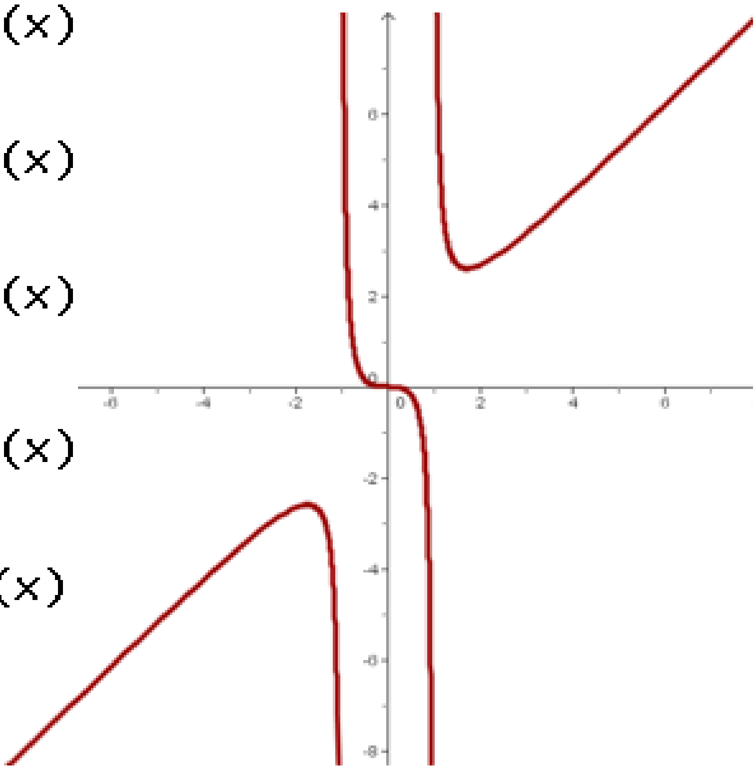
Ejercicios de Funciones, límites y continuidad.

1. Observa la gráfica de esta función f(x) y calcular estos límites.

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$
2. $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$
3. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$
4. $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$
5. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$



1. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
2. $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \infty \end{cases}$
3. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$
4. $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \infty$
5. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

2. Calcular el límite de: $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2+x} \right)$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2+x} \right) = \infty - \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{(-x)^2+3(-x)} - \sqrt{(-x)^2+(-x)} \right) =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2-3x} - \sqrt{x^2-x} \right) =$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-3x}-\sqrt{x^2-x}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{x^2-x}\right)}{\left(\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{x^2-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x-x^2+x}{\left(\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{x^2-x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x}{\left(\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{x^2-x}\right)}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$=\frac{-2}{1+1}=-1$$

3. Calcular el límite de:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-1}-\frac{x^2+1}{x-2}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-1}-\frac{x^2+1}{x-2}\right)=\infty-\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x^2-x^3-x+x^2+1}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2-x-+1}{x^2-3x+2}=-1$$

4. Calcular el límite de: $\lim_{x\to\infty}\frac{7x-1}{\sqrt[3]{5x^3+4x-2}}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x-1}{\sqrt[3]{5x^3+4x-2}}=\frac{\infty}{\infty}\quad=\frac{7}{\sqrt[3]{5}}$$

5. Calcular el límite de: $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^4+x^2+1}}{x^2+1}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^4+x^2+1}}{x^2+1}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^4+x^2+1}}{x^2+1}=\frac{\sqrt{4}}{1}=2$$

6. Calcular el límite de: $\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+1)^2-3x^2+3}{x^3-5}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+1)^2-3x^2+3}{x^3-5}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+1)^2-3x^2+3}{x^3-5}=\infty$$

Al elevar el binomio del numerador al cuadrado obtenemos x^4, y por tanto el grado del numerador es mayor que el grado del denominador.

7. Calcular el límite de $\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x^8-5)}{x^2}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x^8-5)}{x^2}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x^8-5)}{x^2}=0$$

El denominador es un infinito de orden superior.

8. Calcular el límite de: $\lim_{x\to\infty}\frac{3^x-1}{\sqrt{x^7+x^5}}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3^x-1}{\sqrt{x^7+x^5}}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3^x-1}{\sqrt{x^7+x^5}}=\infty$$

El numerador es un infinito de orden superior.

9. Calcular el límite de: $\lim_{x\to\infty}\frac{x^7+x^5+x^3}{\left(\frac{1}{2}\right)^x}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^7+x^5+x^3}{\left(\frac{1}{2}\right)^x}=\frac{\infty}{0}=\infty$$

10. Calcular el límite de: $\lim_{x\to 0}\frac{2}{3+4^{\frac{1}{x}}}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2}{3+4^{\frac{1}{0}}}$$

Calculamos los línimites laterales

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{2}{3+4^{\frac{1}{0}}}=\frac{2}{3+4^{-\infty}}=\frac{2}{3+0}=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2}{3+4^{\frac{1}{0}}}=\frac{2}{3+4^{\infty}}=\frac{2}{\infty}=0$$

No tiene límite

11. Calcular el límite de: $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{18x^2+1}\,\frac{1}{\sqrt{32x^2-3}}\right)$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{18x^2+1}\,\frac{1}{\sqrt{32x^2-3}}\right)=\infty\cdot 0$$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{18x^2+1}{32x^2-3}}=\sqrt{\lim_{x\to\infty}\frac{18x^2+1}{32x^2-3}}=\sqrt{\frac{18}{32}}=\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{3}{4}$$

12. Calcular el límite de: $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^2-1}{x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^2-1}{x}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+2)}{x}=\lim_{x\to 0}(x+2)=2$$

13. Calcular el límite de: $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-5x+6}$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-5x+6}=\frac{0}{0};\ \lim_{x\to 3}\frac{(x+3)(x-3)}{(x-2)(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)}{(x-2)}=6$$

14. Calcular el límite de: $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\frac{0}{0};\ \lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{(\sqrt{x+1}+2)}=\frac{1}{4}$$

15. Calcular: (en todos los ejercicios que siguen hay un error. hay que cambiar *n* por *x*, o viceversa)

1. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2n^2}{3n+1}\right)^{\frac{3n^2+2}{5n-3}}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2n^2}{3n+1}\right)^{\frac{3n^2+2}{5n-3}}=\infty^{\infty}=\infty$$

2. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2n^2}{3n+1}\right)^{\frac{-3n^2+2}{5n-3}}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2n^2}{3n+1}\right)^{\frac{-3n^2+2}{5n-3}}=\infty^{-\infty}=\frac{1}{\infty^{\infty}}=\frac{1}{\infty}=0$$

3. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2n^2}{3n+1}\right)^{\frac{-3n^2+2}{5n^2-3}}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2n^2}{3n+1}\right)^{\frac{-3n^2+2}{5n^2-3}}=\infty^{-\frac{3}{5}}=\frac{1}{\sqrt[5]{\infty^3}}=\frac{1}{\infty}=0$$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2n^2}{3n^3+1}\right)^{\frac{3n^2+2}{5n-3}}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2n^2}{3n^3+1}\right)^{\frac{3n^2+2}{5n-3}}=0^{\infty}=0$$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2n^2}{3n^3+1}\right)^{\frac{-3n^2+2}{5n-3}}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2n^2}{3n^3+1}\right)^{\frac{-3n^2+2}{5n-3}}=0^{-\infty}=\frac{1}{0^{\infty}}=\frac{1}{0}=\infty$$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2n^2}{3n^2+1}\right)^{\frac{-3n+2}{5n^2-3}}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2n^2}{3n^2+1}\right)^{\frac{-3n+2}{5n^2-3}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{0}=1$$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2n^2}{3n^2+1}\right)^{\frac{-3n^2+2}{5n-3}}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2n^2}{3n^2+1}\right)^{\frac{-3n^2+2}{5n-3}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-\infty}=\left(\frac{3}{2}\right)^{\infty}=\infty$$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2n^2}{3n^2+1}\right)^{\frac{3n^2+2}{5n-3}}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2n^2}{3n^2+1}\right)^{\frac{3n^2+2}{5n-3}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{\infty}=0$$

16. Calcular el límite de: $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{X-1}{x-3}-\dfrac{x+5}{x^2-4X+3}\right)$

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{X-1}{x-3}-\frac{x+5}{x^2-4X+3}\right)=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x^2-2x+1)-(x+5)}{(x-3)(x-1)}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-3x-4}{(x-3)(x-1)}=\frac{-4}{0}$$

Calculamos los límites laterales

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-3x-4}{(x-3)(x-1)}=-\infty \; ; \; \lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-3x-4}{(x-3)(x-1)}=\infty$$

No tiene límite

17. Calcular el límite de: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\log x\right)$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\log x\right)=\infty\cdot 0 \; ; \; \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\log x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\log x}{x}\right)=0$$

El denominador es un infinito de orden superior

18. Calcular el límite de: $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+16}-4}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+16}-4}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+9}-3)(\sqrt{x+9}+3)(\sqrt{x+16}+4)}{(\sqrt{x+16}-4)(\sqrt{x+16}+4)(\sqrt{x+9}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x+9-9)(\sqrt{x+16}+4)}{(x+16-16)(\sqrt{x+9}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+16}+4)}{(\sqrt{x+9}+3)}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

19. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

1. $f(x)=\frac{5}{x^4-16}$

La función es continua en todos los puntos de su dominio. **D = R− {−2,2}**

La función tiene dos puntos de discontinuidad en x = −2 y x = 2.

2. $f(x)=\frac{x-7}{x^3-x^2-11x+3}$

La función es continua en toda R menos en los valores que se anula el denominador, si igualamos éste a cero y resolvemos la ecuación obtendremos los puntos de discontinuidad.

$x^3-x^2-11x+3=0$;

	1	−1	−11	3
−3		−3	12	−3
	1	−4	1	0

x = −3; y resolviendo la ecuación de 2º grado obtenemos también: x=2−√3 y x=2+√3

La función tiene tres puntos de discontinuidad en x=−3, x=2−√3 y x=2+√3

3. $f(x)=\begin{cases} x+1 & si\ x<2 \\ 2x-1 & si\ x\geq 2 \end{cases}$

$f(2)=3$; $\lim_{x\to 2^-}(x+1)=3$; $\lim_{x\to 2^+}(2x-1)=3$

La función es continua en toda $\mathbb{R}$

4. $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & si\ x\leq 0 \\ 2x-3 & si\ x>0 \end{cases}$

$f(0)=-1$; $\lim_{x\to 0^-}(x^2-1)=-1$; $\lim_{x\to 0^+}(2x-3)=-3$

La función es discontinua inevitable de salto 2 en x = 0 .

5. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & si\ x<1 \\ \sqrt{x+1} & si\ x\geq 1 \end{cases}$

$f(1)=\sqrt{2}$; $\lim_{x\to 1^-}\left(\dfrac{1}{x}\right)=1$; $\lim_{x\to 1^+}\sqrt{x+1}=\sqrt{2}$

En x = 1 hay una discontinuidad de salto finito.

6. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x}{e^x+1} & si\ x\leq 0 \\ x^2+1 & si\ x>0 \end{cases}$

$f(0)=\dfrac{1}{2}$; $\lim_{x\to 0^-}\left(\dfrac{e^x}{e^x+1}\right)=\dfrac{1}{2}$; $\lim_{x\to 0^+}x^2+1=1$

La función es discontinua inevitable de salto 1/2 en x = 0.

20. ¿Son continuas las siguientes funciones en x = 0?

1. $f(x)=2^{-x}$

$f(0)=2^{-0}=\dfrac{1}{2^0}=1$; $\lim_{x\to 0^-}2^{-x}=2^{-0^-}=2^0=1$

$\lim_{x\to 0^+}2^{-x}=2^{-0^+}=\dfrac{1}{2^0}=1$

La función es continua en x = 0.

2. $f(x)=\begin{cases} -x & si\ x\leq 0 \\ \log x & si\ x>0 \end{cases}$

$f(0)=-0=0$; $\lim_{x\to 0^-}-x=0$; $\lim_{x\to 0^+}\log x=-\infty$

En x = 0 hay una discontinuidad de salto infinito.

21. Estudiar la continuidad de la función: $f(x)=\dfrac{x+1}{|x|}$

La función f(x) es continua para x ≠ 0. Vamos a estudiar la continuidad en x = 0.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x+1}{|x|}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x+1}{-x}=\lim_{x\to 0^-}\left(-1-\frac{1}{x}\right)=-1-\frac{1}{0^-}=\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x+1}{|x|}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x+1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1+\frac{1}{0^+}=\infty$$

La función **no es continua en x = 0**, porque no está definida en ese punto.

22. Calcular el valor de a para que la función siguiente sea continua: $f(x)=\begin{cases} x+1 & si\ x\le 1 \\ 3-ax^2 & si\ x>1\end{cases}$

$$f(1)=2\ ;\ \lim_{x\to 1^-}(x+1)=2\ ;\ \lim_{x\to 1^+}(3-ax^2)=3-a$$

$$3-a=2 \qquad a=1$$

23. La función definida por: $f(x)=\begin{cases} \sqrt{ax} & Si\ \ 0\le x\le 8 \\ \dfrac{x^2-32}{x-4} & Si\ \ x>8\end{cases}$ es continua en [0, ∞).

Hallar el valor de ***a*** que hace que esta afirmación sea cierta.

$$\lim_{x\to 8^-}\sqrt{ax}=\sqrt{8a}\ ;\ \lim_{x\to 8^+}\frac{x^2-32}{x-4}=8$$

$$\sqrt{8a}=8 \qquad a=8$$

24. Encontrar los puntos donde la función f(x) = x^2 + 1+ |2x − 1| es discontinua.

$$|2x-1|=0;\quad x=\frac{1}{2}$$

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1-(2x-1) & si\ x<\frac{1}{2} \\ x^2+1+(2x-1) & si\ x\ge\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x+2 & si\ x<\frac{1}{2} \\ x^2+2x & si\ x\ge\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{4}\ ;\ \lim_{x\to 1^-}(x^2-2x+2)=\frac{5}{4}\ ;\ \lim_{x\to 1^+}(x^2+2x)=\frac{5}{4}$$

La función es continua en toda $\mathbb{R}$.

25. Se considera la función $f(x)=\begin{cases} \ln x & si\ \ 0<x<1 \\ ax^2+b & si\ \ 1\le x<\infty\end{cases}$

Si f(2) = 3, determinar los valores de a y b para que f(x) sea continua.

Sólo existe duda de la continuidad en x = 1.

$f(1) = a+b$; $\lim\limits_{x\to 1^-} \ln x = \ln 1 = 0$; $\lim\limits_{x\to -1^+} ax^2 + bx = a+b$

Para que la función sea continua debe cumplirse que: $a+b=0$

Por otro lado tenemos que: $f(2)=3$ $\qquad 4a+b=3$

Resolvemos el sistema de ecuaciones y obtenemos que: a = 1 b = −1

26. Dada la función: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & si \quad x \neq 3 \\ a & si \quad x = 3 \end{cases}$

Determinar el valor de a para que la función sea continua para x = 3.

$\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3} = \dfrac{0}{0}$; $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3} (x+3) = 6$

$a = \lim\limits_{x\to 3} f(x) = 6$

27. Dada la función $f(x) = \begin{cases} sen\ x & Si \quad x \leq -\frac{\pi}{2} \\ a \cdot sen\, x + b & Si \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 2\cos\ x & Si \quad x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Determinar a y b de modo que la función f sea continua para todo valor de x.

$f(-\frac{\pi}{2}) = \lim\limits_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^-} sen\ x = -1$; $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} (a\cdot sen\, x + b) = -a+b$

$-a+b=-1$

$\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} (a\cdot sen\, x + b) = a+b$; $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} 2\cdot\cos x = 0$

$a+b=0$

$a = \dfrac{1}{2} \qquad b = -\dfrac{1}{2}$

28. Sea la función: $f(x) = \begin{cases} |3-x| & si \quad x < 7 \\ ax+4 & si \quad 7 \leq x < 10 \end{cases}$

Determinar el valor de ***a*** para que f(x) sea continua.

En esta función a trozos las dos funciones parciales son continuas en sus dominios. Estudiaremos el comportamiento de la función en el punto de unión.

$\lim\limits_{x\to 7^-} |3-x| = 4$; $\lim\limits_{x\to 7^+} (ax+4) = 7a+4$

$7a+4=4 \qquad a=0$

29. Calcular el valor de ***k*** para que la siguiente función sea continua. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3+2x}{|x|} & si\ x\neq 0 \\ k & si\ x=0 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x^3+2x}{|x|}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^3+2x}{-x}=\lim_{x\to 0^-}(-x^2-2)=-2$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^3+2x}{|x|}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^3+2x}{x}=\lim_{x\to 0^+}(x^2+2)=2$$

Por tanto no existe límite y, por consiguiente no se puede conseguir que f(x) sea continua en x=0, sea cual sea el valor que se le dé a ***k***.

30. $f(x)=\begin{cases} x^2 & si\ x<0 \\ ax+b & si\ 0\leq x<1 \\ 2 & si\ x\geq 1 \end{cases}$. Hallar ***a*** y ***b*** para que la función sea continua.

$f(0)=b$; $\lim_{x\to 0^-}x^2=0$; $\lim_{x\to 0^+}ax+b=b$

$f(1)=2$; $\lim_{x\to 1^-}ax+b=a+b$; $\lim_{x\to 1^+}2=2$

$a+b=2$

$a=2$ $\quad b=0$

31. Calcular los valores de ***a*** y ***b*** para que la siguiente función sea continua.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+1} & Si\ \ x<0 \\ ax+b & Si\ \ 0\leq x\leq 3 \\ x-5 & Si\ \ x<3 \end{cases}$$

$\lim_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x^2+1}=1$; $\lim_{x\to 0^+}(ax+b)=b$; b= 1

$\lim_{x\to 3^-}(ax+1)=3a+1$; $\lim_{x\to 3^+}(x-5)=-2$; 3a = −2 a = −1

32. Debido a unas pésimas condiciones ambientales, una colonia de un millón de bacterias no comienza su reproducción hasta pasados dos meses. La función que representa la población de la colonia al variar el tiempo (expresado en meses) viene dada por:

$$f(t)=\begin{cases} 10^6 & \text{si} & 0\leq t\leq 2 \\ 10^6\cdot e^{t-2} & \text{si} & t>2 \end{cases}$$

Verificar que la población es función continua del tiempo.

$$f(t)=\begin{cases} 10^6 & \text{si} & 0\leq t\leq 2 \\ 10^6\cdot e^{t-2} & \text{si} & t>2 \end{cases}$$

$f(2)=10^6$ $\quad \lim_{t\to 2^-}10^6=10^6$ $\quad \lim_{t\to 2^+}10^6\cdot e^{t-2}=10^6$