Ejercicios de Funciones: Integrales Definidas.

1. $\int_2^3 \frac{x}{x^2-1}\,dx$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln\left(x^2-1\right)\right]_2^3 = \frac{1}{2}\left(\ln 8 - \ln 3\right) = \ln\sqrt{\frac{8}{3}}$$

2. $\int_1^e \frac{dx}{x}$

$$\int_1^e \frac{dx}{x} = \left[\ln x\right]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1$$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x\,dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x\left(1-\cos^2 x\right)\cos^4 x\,dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^4 x \operatorname{sen} x - \cos^6 x \operatorname{sen} x\right)dx = \left[-\frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{1}{7}\cos^7 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{2}{35}$$

4. $\int_2^4 \log x\,dx$

$$u = \log x \xrightarrow{\text{derivar}} u' = \frac{1}{x}\log e \qquad v' = 1 \xrightarrow{\text{integrar}} v = x$$

$$\int_2^4 \log x\,dx = \left[x\log x\right]_2^4 - \int_2^4 \log e\,dx = \left[x\log x - x\log e\right]_2^4 =$$

$$= 4\log 2^2 - 4\log e - 2\log 2 + 2\log e =$$

$$= 8\log 2 - 4\log e - 2\log 2 + 2\log e = 6\log 2 - 2\log e$$

5. $\int_0^{\pi^2} \operatorname{sen}\sqrt{x}\,dx$

Calculamos la integral definida por cambio de variable: $\int \operatorname{sen}\sqrt{x}\,dx$

$$\sqrt{x} = t \qquad x = t^2 \qquad dx = 2t\,dt$$

$$\int \operatorname{sen} t\, 2t\,dt = 2\int t \operatorname{sen} t\,dt$$

Integramos por partes.

$$u = t \xrightarrow{\text{derivar}} u' = 1 \qquad v' = \operatorname{sen} t \xrightarrow{\text{integrar}} v = -\cos t$$

$$2\int t\operatorname{sen} t\,dt = 2\left(-t\cos t + \int \cos t\,dt\right) = 2\left(-t\cos t + \operatorname{sen} t\right) + C$$

$$\int \operatorname{sen}\sqrt{x}\,dx = 2\left(-\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + \operatorname{sen}\sqrt{x}\right) + C$$

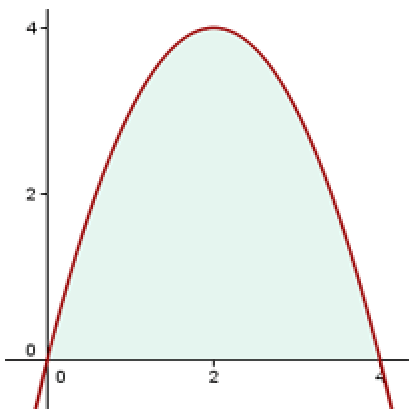
6. Calcular el área del recinto limitado por la curva $y = 4x - x^2$ y el eje OX.

En primer lugar hallamos los puntos de corte con el eje OX para representar la curva y conocer los límites de integración.

$$0 = 4x - x^2 \qquad x = 0 \qquad x = 4$$

En segundo lugar se calcula la integral:

$$A=\int_0^4\left(4x-x^2\right)dx=\left[2x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^4=\frac{32}{3}u^2$$



7. Hallar el área de la región del plano encerrada por la curva y = ln x entre el punto de corte con el eje OX y el punto de abscisa x = e.

En primer lugar calculamos el punto de corte con el eje de abscisas.

$\ln x=0 \qquad e^0=1 \qquad (1,0)$

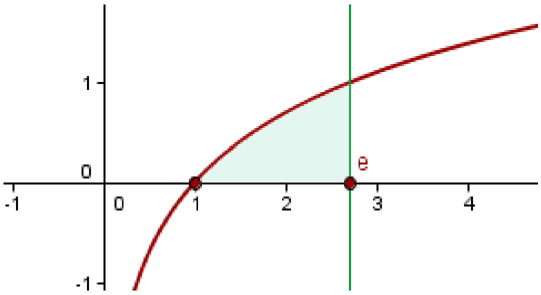
$$\int_1^e \ln x\,dx$$

$$v=\ln x \xrightarrow{\text{derivar}} v'=\frac{1}{x}$$

$$v'=1 \xrightarrow{\text{integrar}} v=x$$

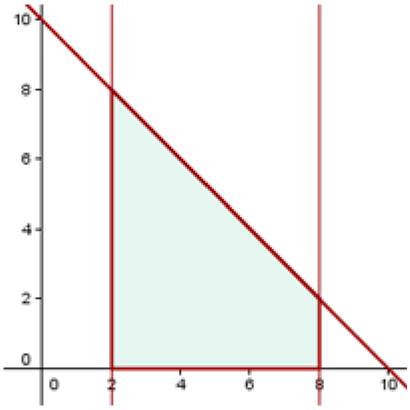
$$\int \ln x\,dx=x\ln x-\int dx=x\ln x-x+C$$

$$\int_1^e \ln x\,dx=\left[x(\ln x-1)\right]_1^e=0+1=1u^2$$



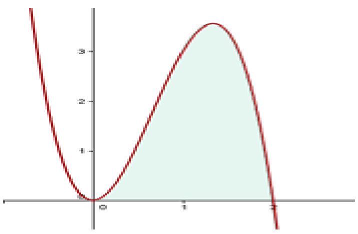
8. Hallar el área limitada por la recta x + y = 10, el eje OX y las ordenadas de x = 2 y x = 8.

$$A=\int_2^8(10-x)\,dx=\left[10x-\frac{x^2}{2}\right]_2^8=30\,u^2$$



9. Calcular el área limitada por la curva $y = 6x^2 - 3x^3$ y el eje de abscisas.

$6x^2-3x^3=0 \qquad 3x^2(2-x)=0 \qquad x_1=0 \quad x_2=2$



$$A=\int_0^2\left(6x^2-3x^3\right)dx=\left[2x^3-\frac{3}{4}x^4\right]_0^2=16-12=4u^2$$

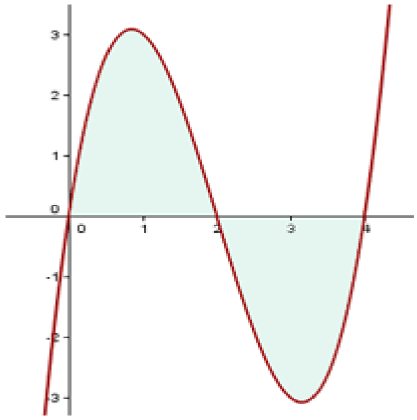
10. Calcular el área de las regiones del plano limitada por la curva f(x) = x^3-6x^2+8x y el eje OX.

$$x^3-6x^2+8x=0 \qquad x\left(x^2-6x+8\right)=0$$

$$x=0 \qquad x=2 \qquad x=4$$

$$A=\int_0^2\left(x^3-6x^2+8x\right)dx+\left|\int_2^4\left(x^3-6x^2+8x\right)dx\right|=$$

$= 8u^2$



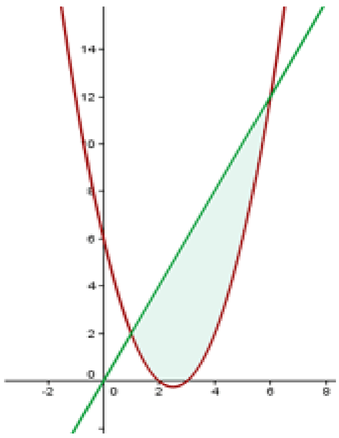
11. Calcular el área limitada por la curva y = x^2 -5x + 6 y la recta y = 2x.

En primer lugar hallamos los puntos de corte de las dos funciones para conocer los límites de integración.

$$\begin{cases} y=x^2-5x+6 \\ y=2x \end{cases} \qquad x_1=1 \qquad x_2=6$$

$$A=\int_1^6\left(2x-x^2+5x-6\right)dx=\int_1^6\left(-x^2+7x-6\right)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{7x^2}{2}-6x\right]_1^6=$$

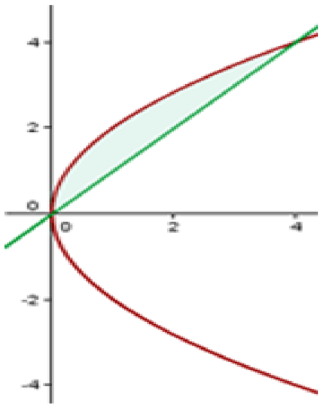
$$=\left(-\frac{6^3}{3}+\frac{7\cdot 6^2}{2}-36\right)-\left(-\frac{1}{3}+\frac{7}{2}-6\right)=\frac{125}{6}u^2$$



12. Calcular el área limitada por la parábola y^2 = 4x y la recta y = x.

$$\begin{cases} y^2=4x \\ y=x \end{cases} \qquad y^2=4y \qquad (0,0) \qquad (4,0)$$

De x = 0 a x = 4, la parábola queda por encima de la recta.



$$A=\int_0^4\sqrt{4x}\,dx-\int_0^4 x\,dx=\int_0^4\left(\sqrt{4x}-x\right)dx=\left[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^2}{2}\right]_0^4=\frac{8}{3}u^2$$

13. Calcular el área limitada por las gráficas de las funciones $3y = x^2$ e $y = -x^2 + 4x$.

En primer lugar representamos las parábolas a partir del vértice y los puntos de corte con los ejes.

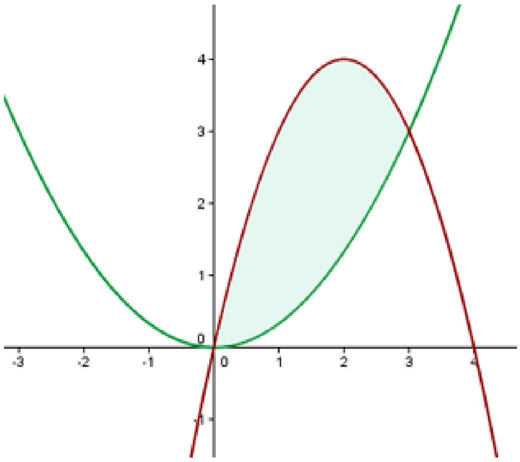
$y = \frac{x^2}{3}$ $\quad x_v = 0 \quad y_v = 0 \quad V(0,0)$

$y = -x^2 + 4x$ $\quad x_v = -\frac{4}{-2} = 2 \quad y_v = 4 \quad V(2,4)$

$-x^2 + 4x = 0 \quad x_1 = 0 \quad x_2 = 4$

Hallamos también los puntos de corte de las funciones, que nos darán los límites de integración.

$\begin{cases} y = \frac{x^2}{3} \\ y = -x^2 + 4x \end{cases} \quad (0,0) \quad (3,3)$



$$A = \int_0^3 \left(-x^2 + 4x - \frac{x^2}{3} \right) dx = \int_0^3 \left(-\frac{4}{3}x^2 + 4x \right) dx =$$

$$= \left[-\frac{4}{9}x^3 + 2x^2 \right]_0^3 = -12 + 18 = 6u^2$$

14. Calcula el área de la figura plana limitada por las parábolas $y = x^2 - 2x$, $y = -x^2 + 4x$.

Representamos las parábolas a partir del vértice y los puntos de corte con los ejes.

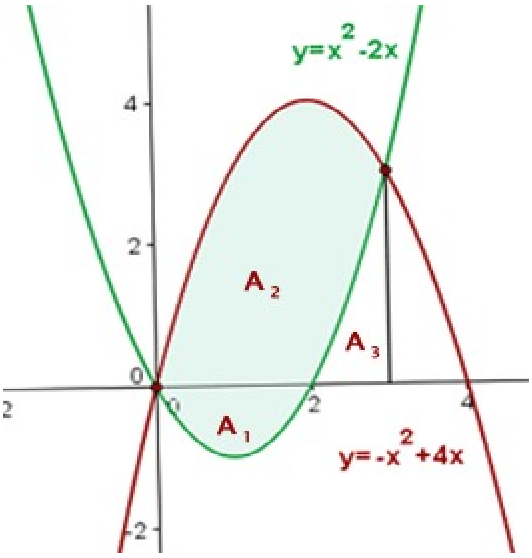
$x_v = \frac{2}{2} = 1 \quad y_v = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1 \quad V(1,-1)$

$0 = x^2 - 2x \quad 0 = x(x-2) \quad (0,0) \quad (2,0)$

$x_v = \frac{-4}{-2} = 2 \quad y_v = -2^2 + 4 \cdot 2 = 4 \quad V(2,-4)$

$0 = -x^2 + 4x \quad 0 = x(-x+4) \quad (0,0) \quad (4,0)$

$\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = -x^2 + 4x \end{cases} \quad x^2 - 2x = -x^2 + 4x \quad (0,0) \quad (3,3)$



$$A_1 = \int_0^2 \left(x^2 - 2x\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_0^2 = -\frac{4}{3} \qquad |A_1| = \frac{4}{3}u^2$$

$$A_2 = \int_0^3 \left(-x^2 + 4x\right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2\right]_0^3 = 9 \qquad A_2 = 9u^2$$

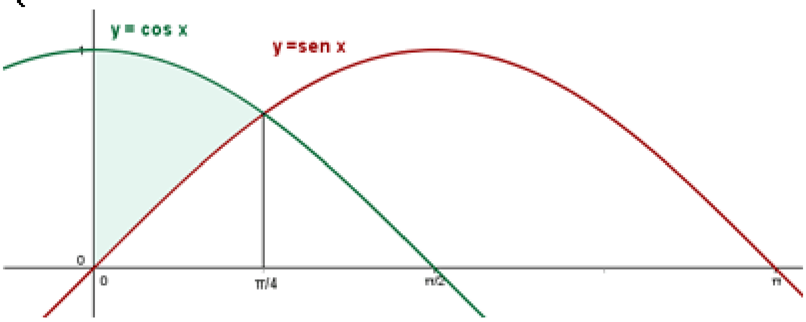
$$A_3 = \int_2^3 \left(x^2 - 2x\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_2^3 = \frac{4}{3} \qquad A_3 = \frac{4}{3}u^2$$

$$A = |A_1| + A_2 - A_3 \qquad A = \frac{4}{3} + 9 - \frac{4}{3} = 9u^2$$

15. Hallar el área de de la región limitada por las funciones: y = sen x , y = cos x , x = 0.

En primer lugar hallamos el punto de intersección de las funciones:

$$\begin{cases} y = \operatorname{sen} x \\ y = \cos x \end{cases} \qquad \operatorname{sen} x = \cos x \qquad x = \frac{\pi}{4}$$



La gráfica del coseno queda por encima de la gráfica del seno en el intervalo de integración.

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \operatorname{sen} x)\, dx = [\operatorname{sen} x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \left(\sqrt{2} - 1\right)u^2$$