Ejercicios de Geometría 1.

1. Hallar el simétrico del punto A(3, -2) respecto de M(- 2, 5).

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MA'}$$

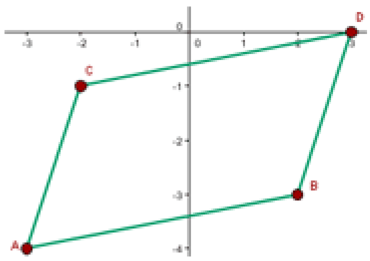
$$(-2-3,\ 5+2) = (x+2,\ y-5)$$

$$x+2=-5 \qquad x=-7$$

$$A'(-7,\ 12)$$

$$y-5=7 \qquad y=12$$

2. Calcula las coordenadas de D para que el cuadrilátero de vértices: A(-1, -2), B(4, -1), C(5, 2) y D; sea un paralelogramo.



$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

$$(4+1,\ -1+2) = (5-x_D,\ 2-y_D)$$

$$5 = 5 - x_D \qquad x_D = 0$$

$$D(0,\ 1)$$

$$1 = 2 - y_D \qquad y_D = 1$$

3. Dados los vectores $\vec{u}$ =(2, k) y $\vec{v}$= (3, -2), calcula k para que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean:

1 Perpendiculares.

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$$

$$2\cdot 3 + k\cdot(-2) = 0 \qquad k = 3$$

2 Paralelos.

$$\alpha = 0^\circ \qquad \cos 0^\circ = 1$$

$$1 = \frac{2\cdot 3 + k\cdot(-2)}{\sqrt{4+k^2}\cdot\sqrt{9+4}} \qquad \sqrt{52+13k^2} = 6-2k$$

$$9k^2 + 24k + 16 = 0 \qquad (3k+4)^2 = 0$$

$$3k+4=0 \qquad k = -\frac{4}{3}$$

Puede hacerse de otra forma teniendo en cuenta que las coordenadas de los vectores deberían ser proporcionales

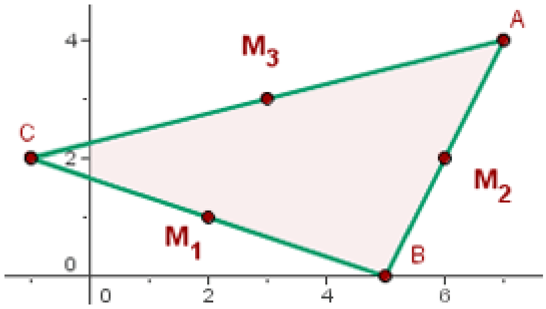
$$\frac{2}{3} = \frac{k}{-2} \qquad k = -\frac{4}{3}$$

3 Formen un ángulo de 60°.

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}=\frac{2\cdot 3+k(-2)}{\sqrt{52+13k^2}} \qquad 3k^2-96k+92=0 \qquad \begin{matrix} k=31.01 \\ k=0.99 \end{matrix}$$

4. Si $M_1(2, 1)$, $M_2(3, 3)$ y $M_3(6, 2)$ son los puntos medios de los lados de un triángulo, ¿cuáles son las coordenadas de los vértices del triángulo?



$$\begin{cases} 6=\dfrac{x_1+x_2}{2} \\ 2=\dfrac{x_2+x_3}{2} \\ 3=\dfrac{x_3+x_1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} 2=\dfrac{y_1+y_2}{2} \\ 1=\dfrac{y_2+y_3}{2} \\ 3=\dfrac{y_3+y_1}{2} \end{cases}$$

$x_1 = 7$ $\quad x_2 = 7$ $\quad x_3 = -1$

$y_1 = 4$ $\quad y_2 = 0$ $\quad y_3 = 3$

A(7, 4) B(5, 0) C(−1, 2)

5. Normalizar (obtener otro con la misma dirección y sentido con módulo 1) los siguientes vectores: $\vec{u} = (1, \sqrt{2})$, $\vec{v} = (-4, 3)$ y $\vec{w} = (8. -8)$.

$$|\vec{u}|=\sqrt{1+2}=\sqrt{3} \qquad \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$$

$$|\vec{v}|=\sqrt{16+9}=5 \qquad \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}=\left(-\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$$

$$|\vec{w}|=\sqrt{36+64}=10 \qquad \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|}=\left(\frac{8}{10},-\frac{8}{10}\right)$$

6. Hallar k si el ángulo que forma $\vec{u} = (3, k)$ con $\vec{v} = (2, -1)$ vale:

1.- 90°

$$\widehat{uv}=90^\circ \qquad \vec{u}\cdot\vec{v}=0$$

$$3\cdot 2+k(-1)=0 \qquad k=6$$

2.- 0°

$$\widehat{uv}=0^\circ \qquad \frac{u_1}{u_2}=\frac{v_1}{v_2}$$

$$\frac{3}{k} = \frac{2}{-1} \qquad k = -\frac{3}{2}$$

3.- 45°

$$\widehat{uv} = 45° \qquad \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

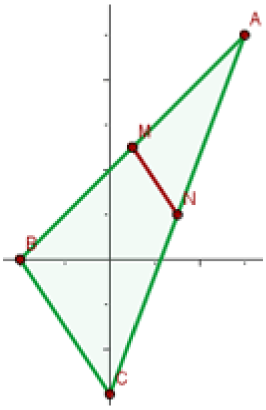
$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3 \cdot 2 + k(-1)}{\sqrt{9+k^2} . \sqrt{4+1}}$$

$$k = -9$$

$$6k^2 + 48k - 54 = 0$$

$$k = 1$$

7. Comprobar que el segmento de une los puntos medios de los lados AB y AC del triángulo: A(3,5), B(-2,0), C(0,-3), es paralelo al lado BC e igual a su mitad.



$$\overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{BC}$$

$$M\left(\frac{3-2}{2}, \frac{5+0}{2}\right) \qquad M\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

$$N\left(\frac{3+0}{2}, \frac{5-3}{2}\right) \qquad N\left(\frac{3}{2}, 1\right)$$

$$\overrightarrow{MN} = \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}, 1 - \frac{5}{2}\right) \qquad \overrightarrow{MN} = \left(1, -\frac{3}{2}\right)$$

Si $\overrightarrow{MN}$ es paralelo a $\overrightarrow{BC}$ sus componentes son proporcionales.

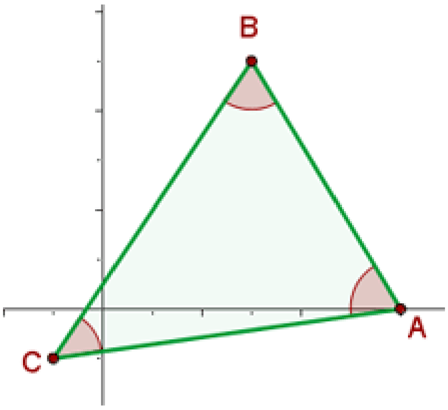
$$\overrightarrow{BC} = (0-(-2), -3-0) \qquad \overrightarrow{BC} = (2, -3)$$. Sí lo son.

$$\left|\overrightarrow{MN}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right|$$

$$\left|\overrightarrow{MN}\right| = \sqrt{1^2 + \left(\frac{-3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{13}$$

$$\overrightarrow{BC} = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$$. Sí lo cumplen.

8. Calcular los ángulos del triángulo de vértices: A(6,0), B(3,5), C(-1,-1).



$\overrightarrow{AB} = (-3, 5)$ $\overrightarrow{BA} = (3, -5)$

$\overrightarrow{AC} = (-7, -1)$ $\overrightarrow{CA} = (7, 1)$

$\overrightarrow{BC} = (-4, -6)$ $\overrightarrow{CB} = (4, 6)$

$$\cos \widehat{A} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|}$$

$$\cos \widehat{A} = \frac{(-3)\cdot(-7)+5\cdot(-1)}{\sqrt{(-3)^2+5^2} \cdot \sqrt{(-7)^2+(-1)^2}}$$

$$\cos \widehat{A} = \frac{16}{\sqrt{34}\cdot\sqrt{50}} \qquad \widehat{A} = 67^\circ\ 10'$$

$$\cos \widehat{B} = \frac{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}}{\left|\overrightarrow{BC}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BA}\right|}$$

$$\cos \widehat{B} = \frac{(-4)\cdot 3+(-6)\cdot(-5)}{\sqrt{52}\cdot\sqrt{34}}$$

$$\cos \widehat{B} = \frac{18}{\sqrt{52}\cdot\sqrt{34}} \qquad \widehat{B} = 64^\circ\ 39'$$

$$\cos \widehat{C} = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CB}\right|}$$

$$\cos \widehat{C} = \frac{7\cdot 4+1\cdot 6}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{52}}$$

$$\cos \widehat{C} = \frac{34}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{52}} \qquad \widehat{C} = 48^\circ\ 10'\ 47''$$

9. Dados los vectores $\vec{u} = (1, 4)$, $\vec{v} = (1, 3)$ que constituyen una base. Expresar en esta base el vector $\vec{w} = (-1. -1)$.

$(-1, -1) = a\,(1, 4) + b\,(1, 3)$

$-1 = a + b \quad a = -1 - b \quad a = 2$

$-1 = 4a + 3b \quad -1 = 4(-1 - b) + 3b \quad b = -3$

$\vec{w} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$

10. Calcular el valor de a para que los vectores $\vec{u} = (3, 4)$ y $\vec{v} = (a, -2)$ formen un ángulo de 45°.

$$\cos 45° = \frac{3a-8}{\sqrt{3^2+4^2}\cdot\sqrt{a^2+(-2)^2}} \qquad \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3a-8}{5}$$

$$\sqrt{2\cdot(a^2+4)} = \frac{6a-16}{5} \qquad 2\cdot(a^2+4) = \frac{36a^2-192a+256}{25}$$

$$7a^2+96a-28=0 \qquad a_1 = \frac{2}{7} \qquad a_2 = -14$$

11. Escribe de todas las formas posibles la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(1, 2) y B(-2, 5).

$A(1,2) \qquad B(-2,5) \qquad \overrightarrow{AB} = (-3,3)$

Ecuación vectorial

$(x,y) = (1,2) + k\cdot(-3,3)$

Ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = 1-3k \\ y = 2+3k \end{cases}$$

Ecuación continua

$$\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{3}$$

Ecuación general

$x + y - 3 = 0$

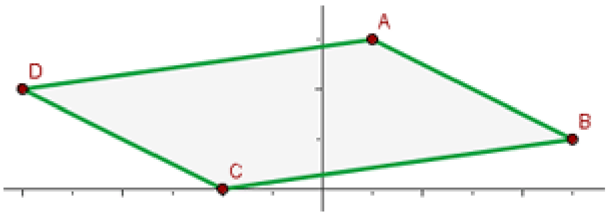
Ecuación explícita

$y = -x + 3$

Ecuación punto-pendiente

$y - 2 = -1\cdot(x-1)$

12. De un paralelogramo ABCD conocemos A(1, 3), B(5, 1), C(-2, 0). Halla las coordenadas del vértice D.



$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

$(x_D - 1, y_D - 3) = (-2 - 5, 0 - 1)$

$x_D - 1 = -7$

$D = (-6, 2)$

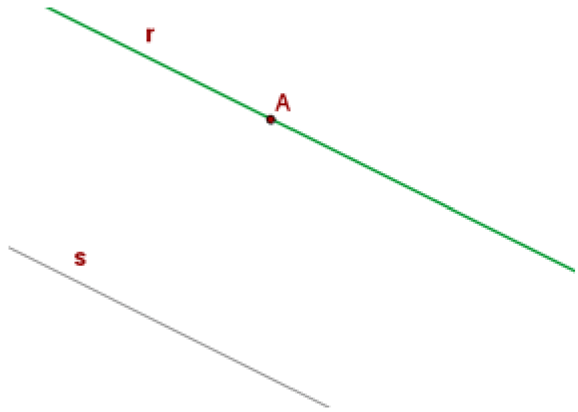
$y_D - 3 = -1$

13. Hallar la pendiente y la ordenada en el origen de la recta 3x + 2y - 7 = 0.

$3x + 2y - 7 = 0 \qquad y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{7}{2}$

$m = -\dfrac{3}{2} \qquad b = \dfrac{7}{2}$

14. Hallar la ecuación de la recta r, que pasa por A(1,5), y es paralela a la recta s ≡ 2x +y+2 =0.

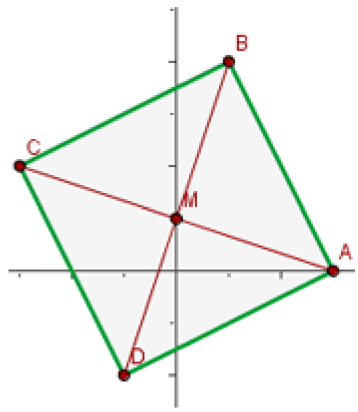


$m_r = m_s = \dfrac{-2}{1}$

$y - 5 = -2 \cdot (x - 1)$

$2x + y - 7 = 0$

15. Se tiene el cuadrilátero ABCD cuyos vértices son A(3, 0), B(1, 4), C(-3, 2) y D(-1, -2). Comprueba que es un paralelogramo y determina su centro.



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{AB} = (1 - 3, 4 - 0) = (-2, 4)$

$\overrightarrow{DC} = (-1 - (-3), -2 - 2) = (2 - 4)$

$$\frac{-2}{2} = \frac{4}{-4} \qquad 8 = 8$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$

$$(-1-3,\ -2-0) = (-3-1,\ 2-4)$$

$$(-4,\ -2) = (-4,\ -2)$$

Es un paralelogramo

Las diagonales se cortan en el punto medio

$$M\left(\frac{3-3}{2}, \frac{0+2}{2}\right) \qquad M = (0, 1)$$

16. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (2, -3) y es paralela a la recta que une los puntos (4, 1)) y (-2, 2).

$$r \parallel s \qquad m_r = m_s = \frac{2-1}{-2-4} = -\frac{1}{6}$$

$$m_r = -\frac{1}{6} \qquad A(2, -3)$$

$$y + 3 = -\frac{1}{6}(x-2) \qquad x + 6y + 16 = 0$$

17. La recta r ≡ 3x + ny - 7 = 0 pasa por el punto A(3,2) y es paralela a la recta s ≡ mx + 2y - 13 = 0. Calcula m y n.

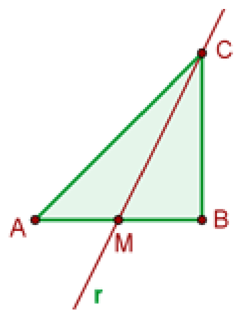
$$A \in r$$

$$3 \cdot 3 + n \cdot 2 - 7 = 0 \qquad n = -1$$

$$r \parallel s$$

$$\frac{3}{m} = \frac{-1}{2} \qquad m = -6$$

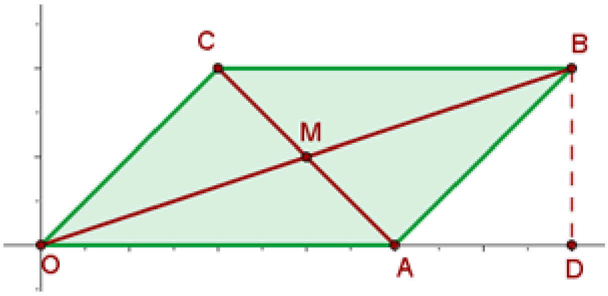
18. Dado el triángulo ABC, de coordenadas A(0, 0), B(4, 0) y C(4, 4); calcula la ecuación de la mediana que pasa por el vértice C.



$$M_{AB}\left(\frac{0+4}{2}, \frac{0+0}{2}\right) \qquad M_{AB}(2, 0) \qquad B(4, 0)$$

$$\frac{x-2}{4-2} = \frac{y-0}{4-0} \qquad 2x - y - 4 = 0$$

19. De un paralelogramo se conoce un vértice, A(8, 0), y el punto de corte de las dos diagonales, Q(6, 2). También sabemos que otro vértice se encuentra en el origen de coordenadas. Calcular:



1.- Los otros vértices.

M es el punto medio de $\overline{OB}$

$$(6,2)=\left(\frac{0+x_B}{2},\frac{0+y_B}{2}\right)\qquad \begin{matrix} 6=\dfrac{0+x_B}{2} \\ 2=\dfrac{0+y_B}{2}\end{matrix}\qquad B(12,4)$$

M es el punto medio de $\overline{AC}$

$$(6,2)=\left(\frac{8+x_C}{2},\frac{0+y_C}{2}\right)\qquad \begin{matrix} 6=\dfrac{8+x_C}{2} \\ 2=\dfrac{0+y_C}{2}\end{matrix}\qquad C(4,4)$$

2.- Las ecuaciones de las diagonales.

Ecuación de AC

$$\frac{x-8}{4-8}=\frac{y-0}{4-0}\qquad x+y-8=0$$

Ecuación de OB

$$\frac{x-12}{12-0}=\frac{y-4}{4-0}\qquad x-3y=0$$

3.- La longitud de las diagonales.

$$AC=\sqrt{(4-8)^2+(4-0)^2}=4\sqrt{2}$$

$$OB=\sqrt{(12-0)^2+(4-0)^2}=4\sqrt{10}$$

20. Hallar el ángulo que forman las rectas que tienen por ecuaciones:

1.- $r_1\equiv\begin{cases}x=3+2k\\ y=-1+3k\end{cases}\qquad r_2\equiv\begin{cases}x=-4-3k\\ y=5+k\end{cases}$

$$\vec{u}=(2,3)\qquad\qquad \vec{v}=(-3,1)$$

$$\cos\alpha = \frac{|2\cdot(-3)+3\cdot 1|}{\sqrt{4+9}\cdot\sqrt{9+1}} = \frac{|-6+3|}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{10}} = 0.2631$$

$$\alpha = 74^\circ\ 44'\ 41''$$

2.- $s_1 \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y+4}{2}$ $\qquad s_2 \equiv \frac{x+4}{\sqrt{3}} = \frac{y-1}{-1}$

$\vec{u} = (1,2) \qquad \vec{v} = (\sqrt{3},-1)$

$$\cos\alpha = \frac{|1\cdot\sqrt{3}+2\cdot(-1)|}{\sqrt{1+4}\cdot\sqrt{3+1}} = \frac{|\sqrt{3}-2|}{\sqrt{5}\cdot 2} = 0.0599$$

$$\alpha = 86^\circ\ 33'\ 54''$$

21. Hallar el ángulo que forman las rectas que tienen por ecuaciones:

1.- $r_1 \equiv 3x+4y-12=0 \qquad r_2 \equiv 6x+8y+1=0$

$\vec{u}=(-4,\ 3) \qquad \vec{v}=(-8,\ 6)$

Los vectores son proporcionales, paralelos → $\alpha=0^\circ$

2.- $s_1 \equiv 2x+3y-5=0 \qquad s_2 \equiv 3x-2y+10=0$

$\vec{u}=(-3,\ 2) \qquad \vec{v}=(2,\ 3)$

$\cos\alpha = \frac{0}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=0.$ → $\alpha=90^\circ$

22. Dadas las rectas r ≡ 3x + y - 1 = 0 y s ≡ 2x + my -8 = 0, determinar m para que formen un ángulo de 45°.

$\alpha = 45^\circ \qquad \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\vec{v_r} = (-1,\ 3) \qquad \vec{v_s} = (-m,\ 2)$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{-1\cdot(-m)+3\cdot 2}{\sqrt{1+9}\cdot\sqrt{m^2+4}} \qquad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{m+6}{\sqrt{1+9}\cdot\sqrt{m^2+4}}\right)^2$$

$$\frac{36+12m+m^2}{10(4+m^2)} = \frac{1}{2} \qquad m^2-3m-4=0$$

$$m_1 = 4 \qquad m_2 = -1$$