Ejercicios de números complejos.

1. Calcular todas las raíces de la ecuación: $x^6 + 1 = 0$

$$x^6 = -1$$

$$x = \sqrt[6]{-1}$$

$$x = \sqrt[6]{1_{180^\circ}}$$

$$\sqrt[6]{1} = 1$$

$$a = \frac{180^\circ + 360^\circ k}{6} \quad \begin{cases} k = 0 & a_1 = 30^\circ & x_1 = 1_{30^\circ} \\ k = 1 & a_2 = 90^\circ & x_2 = 1_{90^\circ} \\ k = 2 & a_3 = 150^\circ & x_3 = 1_{150^\circ} \\ k = 3 & a_4 = 210^\circ & x_4 = 1_{210^\circ} \\ k = 4 & a_5 = 270^\circ & x_5 = 1_{270^\circ} \\ k = 5 & a_6 = 330^\circ & x_6 = 1_{330^\circ} \end{cases}$$

2. Realiza las siguientes operaciones:

1) $$\frac{(3_{20^\circ})^3}{2_{60^\circ}} = \frac{27_{60^\circ}}{2_{60^\circ}} = \left(\frac{27}{2}\right)_{0^\circ}$$

2) $(1+i)^{10} =$

$$z = 1 + i$$

$$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$a = arc\,tg\,\frac{+1}{+1} = 45^\circ$$

$$z = \left(\sqrt{2}\right)_{45^\circ}$$

$$\left(\sqrt{2}_{45^\circ}\right)^{10} = 32_{450^\circ}$$

3) $(1+\sqrt{3}\,i)^6 =$

$$z = 1 + \sqrt{3}\,i \qquad |z| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$$

$$a = arc\,tg\,\frac{+\sqrt{3}}{+1} = 60^\circ$$

$$z = (2)_{60^\circ}$$

$$(2_{60^\circ})^6 = 64_{360^\circ} = 64_0$$

4) $\sqrt[3]{\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}} =$

$z_1 = 1 - i$

$$|z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$a_1 = arc\,tg\,\frac{-1}{+1} = 135^o$$

$$z_1 = \left(\sqrt{2}\right)_{135^o}$$

$z_2 = \sqrt{3} + i$

$$|z_2| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2$$

$$a_2 = arc\,tg\,\frac{+1}{+\sqrt{3}} = 30^o$$

$$z_2 = 2_{30^o}$$

$$\sqrt[3]{\frac{\left(\sqrt{2}\right)_{135^\circ}}{2_{30^\circ}}} = \sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)_{105^\circ}}$$

$$|z| = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{2}{4}}} = \sqrt[6]{\frac{1}{2}}$$

$$a = \frac{105^o + 360^o k}{3} \begin{cases} k = 0 & a_1 = 35^o & z_1 = \left(\sqrt[6]{\frac{1}{2}}\right)_{35^\circ} \\ k = 1 & a_2 = 155^o & z_2 = \left(\sqrt[6]{\frac{1}{2}}\right)_{155^\circ} \\ k = 2 & a_3 = 275^o & z_3 = \left(\sqrt[6]{\frac{1}{2}}\right)_{275^\circ} \end{cases}$$

3. Resuelve la siguiente raíz, expresando los resultados en forma polar.

$\sqrt[5]{10 + 10i}$

$$z = 10 + 10i$$

$$|z| = \sqrt{10^2 + 10^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$$

$$a = \text{arc tg}\,\frac{+10}{+10} = 45^o$$

$$z = \left(10\sqrt{2}\right)_{45^o}$$

$$\sqrt[5]{\left(10\sqrt{2}\right)_{45^o}}$$

$$|z'| = \sqrt[5]{\left(10\sqrt{2}\right)} = \sqrt[10]{200}$$

$$a = \frac{45^o + 360^o k}{5} \quad \begin{cases} k = 0 & a_1 = 9^o & z'_1 = \left(\sqrt[10]{200}\right)_{9^o} \\ k = 1 & a_2 = 81^o & z'_2 = \left(\sqrt[10]{200}\right)_{81^o} \\ k = 2 & a_3 = 153^o & z'_3 = \left(\sqrt[10]{200}\right)_{153^o} \\ k = 3 & a_4 = 225^o & z'_4 = \left(\sqrt[10]{200}\right)_{225^o} \\ k = 4 & a_5 = 297^o & z'_5 = \left(\sqrt[10]{200}\right)_{297^o} \end{cases}$$

4. Escribe una ecuación de segundo grado que tenga por soluciones $1 + 2i$ y su conjugado.

Sabemos que una ecuación de segundo grado tiene dos soluciones y conocemos que al sumar las soluciones se obtiene '-b' y al multiplicarlas se obtiene 'c'. Por tanto:

$$x_1 = 1 + 2i$$

$$x_2 = 1 - 2i$$

$$x^2 - Sx + P = 0$$

$$S = 1 + 2i + 1 - 2i = 2$$

$$P = (1 + 2i) \cdot (1 - 2i) = 1 + 4 = 5$$

$$x^2 - 2x + 5 = 0$$

5. Calcula la siguiente operación, dando el resultado en forma polar. $\dfrac{(2 - 3i) - (3 + 2i)}{(3 + 2i) - (2 + i)}$

$$\frac{(2-3i)-(3+2i)}{(3+2i)-(2+i)} = \frac{-1-5i}{1+i} = \frac{(-1-5i)\cdot(1-i)}{(1+i)\cdot(1-i)} =$$

$$= \frac{-1+i-5i+5i^2}{1-i^2} = \frac{-6-4i}{2} = -3-2i$$

$z = -3-2i$

$$|z| = \sqrt{(-3)^2+(-2)^2} = \sqrt{13}$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{-2}{-3} = 213^\circ\ 41'\ 24''$$

$z = \left(\sqrt{13}\right)_{213^\circ\ 41'\ 24''}$

6. Calcula el valor de cociente, y representa los afijos de sus raíces cúbicas. $\dfrac{i^7-i^{-7}}{2i}$

$$\frac{i^7-i^{-7}}{2i} = \frac{i^7-\frac{1}{i^7}}{2i} = \frac{\frac{i^{14}-1}{i^7}}{2i} = \frac{i^{14}-1}{2i^8} =$$

$$= \frac{i^2-1}{2} = \frac{-1-1}{2} = -1$$

$z = -1$

$$|z| = \sqrt{(-1)^2+0^2} = 1$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{0}{-1} = 180^\circ$$

$z = 1_{180^\circ}$

$\sqrt[3]{1_{180^\circ}}$

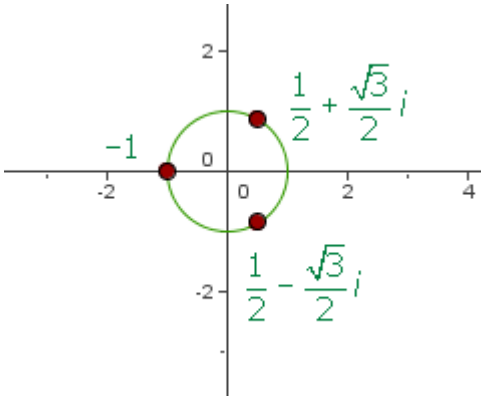
$|z'| = \sqrt[3]{1} = 1$

$$\alpha = \frac{180^\circ + 360^\circ k}{3} \quad \begin{cases} k=0 \\ k=1 \\ k=2 \end{cases} \quad \begin{matrix} \alpha_1 = 60^\circ \\ \alpha_2 = 180^\circ \\ \alpha_3 = 300^\circ \end{matrix} \quad \begin{matrix} z'_1 = 1_{60^\circ} \\ z'_2 = 1_{180^\circ} \\ z'_3 = 1_{300^\circ} \end{matrix}$$

$$z'_1 = 1_{60^\circ} = \cos 60^\circ + i\,sen\ 60^\circ = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z'_2 = 1_{180^\circ} = \cos 180^\circ + i\,sen\ 180^\circ = -1$$

$$z'_3 = 1_{300^\circ} = \cos 300^\circ + i\,sen\ 300^\circ = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$



7. Expresa en forma polar y binómica un complejo cuyo cubo sea: $8\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}\right)$

$$8\left(\cos\frac{\pi}{2}+\text{i}\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}\right)=8\left(\cos 90^\circ+\text{i}\,\text{sen}\,90^\circ\right)=8_{90^\circ}$$

$$z^3=8_{90^\circ}$$

$$z=\sqrt[3]{8_{90^\circ}}$$

$$|z|=2$$

$$\alpha=\frac{90^\circ+360^\circ k}{3}\quad\begin{cases}k=0 & \alpha_1=30^\circ & z'_1=2_{30^\circ}\\ k=1 & \alpha_2=150^\circ & z'_2=2_{150^\circ}\\ k=2 & \alpha_3=270^\circ & z'_3=2_{270^\circ}\end{cases}$$

$$z'_1=2_{30^\circ}=2\left(\cos 30^\circ+\text{i}\,\text{sen}30^\circ\right)=\sqrt{3}+\text{i}$$

$$z'_2=2_{150^\circ}=2\left(\cos 150^\circ+\text{i}\,\text{sen}\,150^\circ\right)=-\sqrt{3}+\text{i}$$

$$z'_3=2_{270^\circ}=2\left(\cos 270^\circ+\text{i}\,\text{sen}270^\circ\right)=-2\text{i}$$

8. Calcular todas las raíces de la ecuación: $x^5+32=0$

$$x^5+32=0$$

$$x^5=-32$$

$$x=\sqrt[5]{-32}$$

$$x=\sqrt[5]{32_{180^\circ}}$$

$$\sqrt[5]{-32}=-2$$

$$\alpha=\frac{180^\circ+360^\circ k}{5}\quad\begin{cases}k=0 & \alpha_1=36^\circ & x_1=1_{36^\circ}\\ k=1 & \alpha_2=108^\circ & x_2=1_{108^\circ}\\ k=2 & \alpha_3=180^\circ & x_3=1_{180^\circ}\\ k=3 & \alpha_4=252^\circ & x_4=1_{252^\circ}\\ k=4 & \alpha_5=324^\circ & x_5=1_{324^\circ}\end{cases}$$

9. Calcula k para que el número complejo que obtenemos de la siguiente división esté representado en la bisectriz del primer cuadrante. $\frac{2+i}{k+i}$

Para que el afijo (a, b), del complejo esté en la bisectriz del primer cuadrante tiene que cumplirse: a = b.
Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador para realizar el cociente.

$$\frac{2+i}{k+i} = \frac{(2+i)\cdot(k-i)}{(k+i)\cdot(k-i)} =$$

$$= \frac{2k-2i+ki-i^2}{k^2-i^2} = \frac{(2k+1)+(k-2)i}{k^2+1} =$$

$$= \frac{2k+1}{k^2+1} + \frac{k-2}{k^2+1}i$$

$$\frac{2k+1}{k^2+1} = \frac{k-2}{k^2+1}$$

$$2k+1 = k-2 \qquad k=-3$$

10. Halla el valor de k para que el cociente $\frac{2-ki}{k-i}$ sea:

1) Un número imaginario puro.

La parte real del número debe ser nula.

$$\frac{2-ki}{k-i} = \frac{(2-ki)\cdot(k+i)}{(k-i)\cdot(k+i)} =$$

$$= \frac{2k+2i-k^2i-ki^2}{k^2-i^2} = \frac{3k+(2-k^2)i}{k^2+1} =$$

$$= \frac{3k}{k^2+1} + \frac{2-k^2}{k^2+1}i$$

$$\frac{3k}{k^2+1} = 0$$

$$3k = 0 \qquad k=0$$

2) Un número real.

La parte imaginaria del número debe ser nula.

$$\frac{2-k^2}{k^2+1} = 0$$

$$2-k^2 = 0 \qquad k=\pm\sqrt{2}$$

11. Se considera el complejo $2+2\sqrt{3}i$. Se gira 45° alrededor del origen de coordenadas en sentido contrario a las agujas del reloj. Hallar el complejo obtenido después del giro.

$$z = 2 + 2\sqrt{3}\,i$$

$$|z| = \sqrt{2^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = 4$$

$$\alpha = arc\,tg\,\frac{2\sqrt{3}}{2} = 60^{\circ}$$

$$z = 4_{60^{\circ}}$$

$$4_{60^{\circ}} \cdot 1_{45^{\circ}} = 4_{105^{\circ}}$$

12. Halla las coordenadas de los vértices de un hexágono regular de centro el origen de coordenadas, sabiendo que uno de los vértices es el afijo del complejo $1_{90^{\circ}}$.

$$z_1' = 1_{30^{\circ}} = \cos 30^{\circ} + i\,sen 30^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$z_2' = 1_{90^{\circ}} = \cos 90^{\circ} + i\,sen\,90^{\circ} = i = (0,1)$$

$$z_3' = 1_{150^{\circ}} = \cos 150^{\circ} + i\,sen\,150^{\circ} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$z_4' = 1_{210^{\circ}} = \cos 210^{\circ} + i\,sen\,210^{\circ} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$z_5' = 1_{270^{\circ}} = \cos 270^{\circ} + i\,sen\,270^{\circ} = -i = (0,-1)$$

$$z_6' = 1_{330^{\circ}} = \cos 330^{\circ} + i\,sen\,330^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

13. Determina el valor de a y b para que el cociente $\dfrac{a+2i}{3+bi}$ sea igual a: $\left(\sqrt{2}\right)_{315^{\circ}}$

$$\left(\sqrt{2}\right)_{315^\circ} = \sqrt{2}\cdot\left[\cos 315^\circ + i\,sen(315^\circ)\right] =$$

$$= \sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 1 - i$$

$$a + 2i = (1 - i)(3 + bi)$$

$$a + 2i = 3 + b + (-3 + b)i$$

$$a = 3 + b \qquad 2 = -3 + b$$

$$a = 8 \qquad b = 5$$

14. ¿Cuáles son las coordenadas del punto que se obtiene al girar 90°, en sentido antihorario alrededor del origen, el afijo del complejo 2 + *i*?

$$z = 2 + i = \sqrt{5}_{26,565}$$
$$z' = \sqrt{5}_{90+26,565} = \sqrt{5}_{116,565} = \sqrt{5}\cdot\cos 116,565 + \sqrt{5}\cdot sen\,116,565\,i = -1 + 2i$$

15. Halla las coordenadas de los vértices de un cuadrado de centro el origen de coordenadas, sabiendo que uno de los vértices es el punto (0, −2).

Escribimos el número en forma polar
(0, −2) = −2 *i*

$$\alpha = \frac{0^\circ + 360^\circ k}{4}\begin{cases} k = 0 & \alpha_1 = 0^\circ & z'_1 = 2_{0^\circ} \\ k = 1 & \alpha_1 = 90^\circ & z'_2 = 2_{90^\circ} \\ k = 2 & \alpha_1 = 180^\circ & z'_3 = 2_{180^\circ} \\ k = 3 & \alpha_1 = 270^\circ & z'_4 = 2_{270^\circ} \end{cases}$$

$$z'_1 = 2_{0^\circ} = 2(\cos 0^\circ + i\,sen\,0^\circ) = 2 = (2,0)$$

$$z'_1 = 2_{90^\circ} = 2(\cos 90^\circ + i\,sen\,90^\circ) = 2i = (0,2)$$

$$z'_3 = 2_{180^\circ} = 2(\cos 180^\circ + i\,sen\,180^\circ) = -2 = (-2,0)$$

$$z'_4 = 2_{270^\circ} = 2(\cos 270^\circ + i\,sen\,270^\circ) = -2i = (0,-2)$$

16. La suma de los componentes reales de dos números complejos conjugados es seis, y la suma de sus módulos es 10. Determina esos complejos en la forma binómica y polar.

$$\left.\begin{array}{l} z = a + bi \\ \bar{z} = a - bi \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} a + a = 6 \rightarrow a = 3 \\ \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{a^2+b^2} = 10 \rightarrow b = 4 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} z = 3 + 4i \\ \bar{z} = 3 - 4i \end{array}\right\}$$