Ejercicios de ecuaciones, sistemas, inecuaciones.

1. $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

2. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

3. $x^4 - 61x^2 + 900 = 0$

4. $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$

5. $x^4 - 16x^2 - 225 = 0$

6. $x^6 - 7x^3 + 6 = 0$

7. $\frac{1}{x^2 - x} - \frac{1}{x - 1} = 0$

8. $\frac{1}{x - 2} + \frac{1}{x + 2} = \frac{1}{x^2 - 4}$

9. $\frac{3}{x} = 1 + \frac{x - 13}{6}$

10. Halla un número entero sabiendo que la suma con su inverso es $\frac{26}{5}$.

11. $\sqrt{2x - 3} = -1 + x$

12. $\sqrt{5x + 4} - 1 = 2x$

13. $3\sqrt{x - 1} + 11 = 2x$

14. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y = 7 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x + y = 7 \\ x \cdot y = 12 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 169 \\ x + y = 17 \end{cases}$

17. $\begin{cases} y^2 - 2y + 1 = x \\ \sqrt{x} + y = 5 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 4z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 5x - 3y - z = 1 \\ x + 4y - 6z = -1 \\ 2x + 3y + 4z = 9 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 2x - y + 2z = 6 \\ 3x + 2y - z = 4 \\ 4x + 3y - 3z = 1 \end{cases}$

21. Un cliente de un supermercado ha pagado un total de 156 € por 24 l de leche, 6 kg de jamón serrano y 12 l de aceite de oliva. Calcular el precio de cada artículo, sabiendo que 1 l de aceite cuesta el triple que 1 l de leche y que 1 kg de jamón cuesta igual que 4 l. de aceite más 4 l. de leche.

22. Un videoclub está especializado en películas de tres tipos: infantiles, oeste americano y terror. Se sabe que: El 60% de las películas infantiles más el 50% de las del oeste representan el 30% del total de las películas.

El 20% de las infantiles más el 60% de las del oeste más del 60% de las de terror al representan la mitad del total de las películas.

Hay 100 películas más del oeste que de infantiles.

Halla el número de películas de cada tipo.

Soluciones

1. $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

$x^4 - 10x^2 + 9$

$x^2 = t$

$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

$t^2 - 10t + 9 = 0$

$$t = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 9}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2} = \begin{cases} \nearrow t_1 = \frac{18}{2} = 9 \\ \searrow t_2 = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

$\rightarrow x^2 = 9 \qquad x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

$\rightarrow x^2 = 1 \qquad x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$

2. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

$x^2 = t$

$t^2 - 13t + 36 = 0$

$$t = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} = \begin{cases} \nearrow t_1 = \frac{18}{2} = 9 \\ \searrow t_2 = \frac{8}{2} = 4 \end{cases}$$

$$\rightarrow x^2 = 9 \qquad x = \pm\sqrt{9} = \begin{cases} \nearrow x_1 = 3 \\ \searrow x_2 = -3 \end{cases}$$

$$\rightarrow x^2 = 4 \qquad x = \pm\sqrt{4} = \begin{cases} \nearrow x_3 = 2 \\ \searrow x_4 = -2 \end{cases}$$

3. $x^4 - 61x^2 + 900 = 0$

$x^2 = t$

$t^2 - 61t + 900 = 0$

$$t = \frac{61 \pm \sqrt{3721 - 3600}}{2} = \frac{61 \pm 11}{2} = \begin{cases} \nearrow t_1 = 36 \\ \searrow t_2 = 25 \end{cases}$$

$\rightarrow \; x^2 = 36 \qquad x = \pm\sqrt{36} \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = -6 \end{cases}$

$\rightarrow \; x^2 = 25 \qquad x = \pm\sqrt{25} \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -5 \end{cases}$

4. $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$

$x^2 = t$

$t^2 - 25t + 144 = 0$

$$t = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 576}}{2} = \frac{25 \pm 7}{2} = \begin{cases} t_1 = 16 \\ t_2 = 9 \end{cases}$$

$\rightarrow \; x^2 = 16 \qquad x = \pm\sqrt{16} \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -4 \end{cases}$

$\rightarrow \; x^2 = 9 \qquad x = \pm\sqrt{9} \begin{cases} x_3 = 3 \\ x_4 = -3 \end{cases}$

5. $x^4 - 16x^2 - 225 = 0$

$x^2 = t$

$t^2 - 16t - 225 = 0$

$$t = \frac{16 \pm \sqrt{256 + 900}}{2} = \frac{16 \pm 34}{2} = \begin{cases} t_1 = 25 \\ t_2 = -9 \end{cases}$$

$\rightarrow \; x^2 = 25 \qquad x = \pm\sqrt{25} \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -5 \end{cases}$

$\rightarrow \; x^2 = -9 \qquad x = \pm\sqrt{-9} \notin \mathbb{R}$

6. $x^6 - 7x^3 + 6 = 0$

$x^3 = t$

$t^2 - 7t + 6 = 0$

$$t = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2} = \begin{cases} \nearrow t_1 = \frac{12}{2} = 6 \\ \searrow t_2 = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow x^3 = 6 \qquad x = \sqrt[3]{6}$$

$$\rightarrow x^3 = 1 \qquad x = \sqrt[3]{1} \qquad x = 1$$

7. $\frac{1}{x^2 - x} - \frac{1}{x-1} = 0$

$$x^2 - x = x(x-1)$$

$$m.c.m.\left(x^2 - x,\ x-1\right) = x(x-1)$$

$$1 - x = 0 \qquad x = 1$$

Comprobamos la solución:

$$\frac{1}{1-1} - \frac{1}{1-1} = 0 \qquad \frac{1}{0} - \frac{1}{0} = 0$$

La ecuación no tiene solución porque para x = 1 se anulan los denominadores. Un denominador no puede ser 0.

8. $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} = \frac{1}{x^2-4}$

$$x^2 - 4 = (x-2)\cdot(x+2)$$

$$m.c.m.\left(x-2, x+2,\ x^2-4\right) = (x-2)\cdot(x+2)$$

$$x + 2 + x - 2 = 1 \qquad 2x = 1 \qquad x = \frac{1}{2}$$

Comprobamos la solución:

$$\frac{1}{\frac{1}{2} - 2} + \frac{1}{\frac{1}{2} + 2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4}$$

$$\frac{1}{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{1}{\frac{-15}{4}} \qquad -\frac{2}{3} + \frac{2}{5} = -\frac{4}{15} \qquad -\frac{4}{15} = -\frac{4}{15}$$

La solución es: $x = \frac{1}{2}$

9. $\frac{3}{x} = 1 + \frac{x-13}{6}$

$m.c.m.(x, 6) = 6x$

$18 = 6x + x(x-13)$

$18 = 6x + x^2 - 13x$

$x^2 - 7x - 18 = 0$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49+72}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{121}}{2} = \frac{7 \pm 11}{2} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{18}{2} = 9 \\ \searrow x_2 = \frac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

Comprobamos las soluciones:

$\frac{3}{9} = 1 + \frac{9-13}{6} \quad \frac{3}{9} = \frac{6-4}{6} \quad \frac{3}{9} = \frac{2}{6} \quad \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

$\frac{3}{-2} = 1 + \frac{-2-13}{6} \quad \frac{3}{-2} = \frac{6-15}{6} \quad \frac{3}{-2} = \frac{-9}{6} \quad -\frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$

10. Halla un número entero sabiendo que la suma con su inverso es $\frac{26}{5}$.

$x + \frac{1}{x} = \frac{26}{5}$

$m.c.m.(5, x) = 5x$

$5x^2 + 5 = 26x \qquad 5x^2 - 26x + 5 = 0$

$$x = \frac{26 \pm \sqrt{676-100}}{10} \begin{cases} \nearrow x_1 = 5 \\ \searrow x_2 = \frac{1}{5} \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

11. $\sqrt{2x-3} = -1 + x$

Elevamos al cuadrado los dos miembros:

$\left(\sqrt{2x-3}\right)^2 = (-1+x)^2$

$2x - 3 = 1 - 2x + x^2$

Resolvemos la ecuación:

$x^2 - 4x + 4 = 0$

$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = \frac{4}{2} = 2$

Comprobamos:

$\sqrt{2\cdot 2-3}-2=-1 \qquad 1-2=-1$

La ecuación tiene por solución x = 2.

12. $\sqrt{5x+4}-1=2x$

Elevamos al cuadrado los dos miembros:

$\sqrt{5x+4}=2x+1 \qquad \left(\sqrt{5x+4}\right)^2=(2x+1)^2$

$5x+4=4x^2+4x+1 \qquad 4x^2-x-3=0$

Resolvemos la ecuación:

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1+48}}{8}=\frac{1\pm 7}{8}=\begin{cases}\nearrow x_1=\frac{8}{8}=1\\ \searrow x_2=\frac{-6}{8}=-\frac{3}{4}\end{cases}$$

Comprobamos: $\sqrt{5\cdot 1+4}-1=2\cdot 1 \qquad 3-1=2 \qquad x=1$

No es solución

13. $3\sqrt{x-1}+11=2x$

Elevamos al cuadrado los dos miembros:

$3\sqrt{x-1}=2x-11 \qquad \left(3\sqrt{x-1}\right)^2=(2x-11)^2$

$9(x-1)=4x^2-44x+121 \qquad 9x-9=4x^2-44x+121$

$4x^2-53x+130=0$

Resolvemos la ecuación:

$$x=\frac{53\pm\sqrt{2809-2080}}{8}=\frac{53\pm\sqrt{729}}{8}=\frac{53\pm 27}{8}=\begin{cases}\nearrow x_1=\frac{80}{8}=10\\ \searrow x_2=\frac{26}{8}=\frac{13}{4}\end{cases}$$

Comprobamos:

$3\sqrt{10-1}+11=2\cdot 10 \qquad 20=20$

$3\sqrt{\frac{13}{4}-1}+11\neq 2\cdot\frac{13}{4}$

No es solución

14. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y = 7 \end{cases}$

$y = 7 - x$

$x^2 + (7 - x)^2 = 25$

$x^2 + 49 - 14x + x^2 = 25$

$2x^2 - 14x + 24 = 0$

$x^2 - 7x + 12 = 0$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2} = \begin{matrix} \nearrow x_1 = 4 \\ \searrow x_2 = 3 \end{matrix}$$

$x_2 = 3$ $\quad y_2 = 7 - 3$ $\quad y_2 = 4$

$x_1 = 4$ $\quad y_1 = 7 - 4$ $\quad y_1 = 3$

15. $\begin{cases} x + y = 7 \\ x \cdot y = 12 \end{cases}$

$y = 7 - x$

$x \cdot (7 - x) = 12 \qquad 7x - x^2 = 12 \qquad x^2 - 7x + 12 = 0$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2} \begin{matrix} \nearrow x_1 = 4 \\ \searrow x_2 = 3 \end{matrix}$$

$x_1 = 4$ $\quad y = 7 - 4$ $\quad y_1 = 3$

$x_2 = 3$ $\quad y = 7 - 3$ $\quad y_2 = 4$

16. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 169 \\ x + y = 17 \end{cases}$

$x = 17 - y$

$2y^2 - 34y + 120 = 0 \qquad y^2 - 17y + 60 = 0$

$$y = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 240}}{2} = \frac{17 \pm 7}{2} \begin{matrix} \nearrow y_1 = 12 \\ \searrow y_2 = 5 \end{matrix}$$

$y_1 = 12$ $\quad x_1 = 17 - 12$ $\quad x_1 = 5$

$y_2 = 5$ $\quad x_1 = 17 - 5$ $\quad x_2 = 12$

17. $\begin{cases} y^2 - 2y + 1 = x \\ \sqrt{x} + y = 5 \end{cases}$

$$\sqrt{y^2 - 2y + 1} + y = 5 \qquad \left(\sqrt{y^2 - 2y + 1}\right)^2 = (5 - y)^2$$

$$y^2 - 2y + 1 = 25 - 10y + y^2 \qquad 8y = 24 \qquad y = 3$$

$$x = 3^2 - 2 \cdot 3 + 1 \qquad x = 4$$

18. $\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 4z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$

1º Ponemos como **primera ecuación** la que tenga el **coeficiente en x más bajo**.

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 4z = 2 \end{cases}$$

2º Hacemos **reducción con la 1ª y 2ª ecuación**, para **eliminar** el término en **x de la 2ª ecuación**. Después ponemos como segunda ecuación el resultado de la operación:

$\mathbf{E'_2 = E_2 - 3E_1}$

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ -3x - 3y + 3z = -3 \end{cases}$$
$$\overline{\quad -y + 4z = -2 \quad}$$

3º Hacemos lo mismo con la ecuación **1ª y 3ª ecuación**, para **eliminar** el término en **x**.

$\mathbf{E'_3 = E_3 - 5E_1}$

$$\begin{cases} 5x + 3y + 4z = 2 \\ -5x - 5y + 5z = -5 \end{cases}$$
$$\overline{\quad -2y + 9z = -3 \quad}$$

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -y + 4z = -2 \\ -2y + 9z = -3 \end{cases}$$

4º Tomamos las ecuaciones **2ª y 3ª**, trasformadas, para hacer reducción y **eliminar** el término en **y**.

$\mathbf{E''_3 = E'_3 - 2E'_2}$

$$\begin{cases} -2y + 9z = -3 \\ 2y - 8z = 4 \end{cases}$$
$$\overline{\quad z = 1 \quad}$$

5º Obtenemos el sistema equivalente escalonado.

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -y + 4z = -2 \\ z = 1 \end{cases}$$

6º Encontrar las soluciones.

$z = 1$

$-y + 4 \cdot 1 = -2 \qquad y = 6$

$x + 6 - 1 = 1 \qquad x = -4$

19. $\begin{cases} 5x - 3y - z = 1 \\ x + 4y - 6z = -1 \\ 2x + 3y + 4z = 9 \end{cases}$

$$\begin{cases} x + 4y - 6z = -1 \\ 5x - 3y - z = 1 \\ 2x + 3y + 4z = 9 \end{cases}$$

$E_2 - 5 \cdot E_1$ $\quad \begin{cases} 5x - 3y - z = 1 \\ -5x - 20y + 30z = 5 \end{cases} \quad -23y + 29z = 6$

$-2 \cdot E_1 + E_3$ $\quad \begin{cases} -2x - 8y + 12z = 2 \\ 2x + 3y + 4z = 9 \end{cases} \quad -5y + 16z = 11$ $\qquad \begin{cases} x + 4y - 6z = -1 \\ -23y + 29z = 6 \\ -5y + 16z = 11 \end{cases}$

$-5 \cdot E_2' + 23 \cdot E_3'$ $\quad \begin{array}{r} 115y - 145z = -30 \\ -115y + 368z = 253 \\ \hline 223z = 223 \end{array} \quad z = 1$ $\qquad \begin{cases} x + 4y - 6z = -1 \\ -23y - 29z = 1 \\ z = 1 \end{cases}$

$-23y + 29 \cdot 1 = 6 \qquad y = 1$

$x + 4 \cdot 1 - 6 \cdot 1 = -1 \qquad x = 1$

20. $\begin{cases} 2x - y + 2z = 6 \\ 3x + 2y - z = 4 \\ 4x + 3y - 3z = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} -z + 3x + 2y = 4 \\ 2z + 2x - y = 6 \\ -3z + 4x + 3y = 1 \end{cases}$$

$2 \cdot E_1 + E_2$

$$\begin{cases} -2z + 6x + 4y = 8 \\ 2z + 2x - y = 6 \end{cases} \quad 8x + 3y = 14$$

$-3 \cdot E_1 + E_{3a}$

$$\begin{cases} 3z - 9x - 6y = -12 \\ -3z + 4x + 3y = 1 \end{cases}$$
$$-5x - 3y = -11$$

$$\begin{cases} -z + 3x + 2y = 4 \\ 8x + 3y = 14 \\ -5x - 3y = -11 \end{cases}$$

$E_2' + E_3'$

$$\begin{aligned} 8x + 3y &= 14 \\ -5x - 3y &= -11 \\ \hline 3x \quad &= 3 \end{aligned} \qquad x = 1$$

$$\begin{cases} -z + 3x + 2y = 4 \\ 8x + 3y = 14 \\ x = 1 \end{cases}$$

$8 \cdot 1 + 3y = 14 \qquad y = 2$

$-z + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 4 \qquad z = 3$

21. Un cliente de un supermercado ha pagado un total de 156 € por 24 l de leche, 6 kg de jamón serrano y 12 l de aceite de oliva. Calcular el precio de cada artículo, sabiendo que 1 l de aceite cuesta el triple que 1 l de leche y que 1 kg de jamón cuesta igual que 4 l de aceite más 4 l de leche.

leche $\rightarrow$ x

jamón $\rightarrow$ y

aceite $\rightarrow$ z

$$\begin{cases} 24x + 6y + 12z = 156 \\ z = 3x \\ y = 4z + 4x \end{cases}$$

$y = 4 \cdot 3x + 4x = 16x$

$24x + 6 \cdot 16x + 12 \cdot 3x = 156$

$x = 1€ \qquad y = 16€ \qquad z = 3€$

leche $\rightarrow$ 1 €

jamón $\rightarrow$ 16 €

aceite $\rightarrow$ 3 €

22. Un videoclub está especializado en películas de tres tipos: infantiles, oeste americano y terror. Se sabe que: El 60% de las películas infantiles más el 50% de las del oeste representan el 30% del total de las películas.

El 20% de las infantiles más el 60% de las del oeste más del 60% de las de terror al representan la mitad del total de las películas.

Hay 100 películas más del oeste que de infantiles.

Halla el número de películas de cada tipo.

infantiles $\rightarrow$ x

oeste $\rightarrow$ y

terror $\rightarrow$ z

$$\begin{cases} \frac{60}{100}x + \frac{50}{100}y = \frac{30}{100}(x+y+z) \\ \frac{20}{100}x + \frac{60}{100}y + \frac{60}{100}z = \frac{1}{2}(x+y+z) \\ y = x + 100 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + 2y - 3z = 0 \\ -3x + y + z = 0 \\ y = x + 100 \end{cases}$$

Sustituimos el valor de y en las dos ecuaciones iniciales y multiplicamos la última obtenida por 3.

$$\begin{cases} 5x - 3z = -200 \\ \underline{-6x + 3z = -300} \end{cases}$$

$$-x \qquad = -500$$

$x = 500 \qquad y = 600 \qquad z = 900$

infantiles $\longrightarrow$ 500 películas

oeste $\longrightarrow$ 600 películas

terror $\longrightarrow$ 900 películas