Ejercicios de Polinomios y Fracciones Algebráicas

1. Dados los polinomios:

1. $P(x) = 4x^2 - 1$

2. $Q(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 2$

3. $R(x) = 6x^2 + x + 1$

4. $S(x) = 1/2x^2 + 4$

5. $T(x) = 3/2x^2 + 5$

6. $U(x) = x^2 + 2$

Calcular:

a) $P(x) + Q(x) =$

b) $P(x) - U(x) =$

c) $P(x) + R(x) =$

d) $2P(x) - R(x) =$

e) $S(x) + T(x) + U(x) =$

f) $S(x) - T(x) + U(x) =$

2. Multiplicar:

a) $(x^4 - 2x^2 + 2) \cdot (x^2 - 2x + 3) =$

b) $(3x^2 - 5x) \cdot (2x^3 + 4x^2 - x + 2) =$

3. Dividir:

a) $(x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20) : (x^2 + 3x - 2)$

b) $(x^6 + 5x^4 + 3x^2 - 2x) : (x^2 - x + 3)$

c) $P(x) = x^5 + 2x^3 - x - 8$ $\quad Q(x) = x^2 - 2x + 1$

4. Divide por Ruffini:

a) $(x^3 + 2x + 70) : (x + 4)$

b) $(x^5 - 32) : (x - 2)$

c) $(x^4 - 3x^2 + 2) : (x - 3)$

5. Indica cuáles de estas divisiones son exactas:

a) $(x^3 - 5x - 1) : (x - 3)$

b) $(x^6 - 1) : (x + 1)$

c) $(x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 1) : (x - 1)$

d) $(x^{10} - 1024) : (x + 2)$

6. Encontrar el valor de k para que al dividir $2x^2 - kx + 2$ por $(x - 2)$ dé de resto 4.

7. Determinar el valor de m para que $3x^2 + mx + 4$ admita $x = 1$ como una de sus raíces.

8. Calcular el valor de a para que el polinomio $x^3 - ax + 8$ tenga la raíz $x = -2$, y calcular las otras raíces.

9. Factorizar y calcular las raíces de los polinomios

a) $x^3 + x^2$

b) $2x^4 + 4x^2$

c) $x^2 - 4$

d) $x^4 - 16$

e) $9 + 6x + x^2$

f) $x^2 - x - 6$

g) $2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6$

h) $2x^3 - 7x^2 + 8x - 3$

i) $x^3 - x^2 - 4$

j) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

k) $6x^3 + 7x^2 - 9x + 2$

l) $9x^4 - 4x^2 =$

m) $x^5 + 20x^3 + 100x =$

n) $2x^3 - 50x =$

o) $2x^5 - 32x =$

p) $2x^2 + x - 28$

q) $x^2 - 2x + 1 =$

r) $x^2 - 6x + 9 =$

s) $x^2 - 20x + 100 =$

t) $x^2 + 10x + 25 =$

u) $x^2 + 14x + 49 =$

v) $x^3 - 4x^2 + 4x =$

w) $x^2 - 11x + 30$

x) $3x^2 + 10x + 3$

y) $2x^2 - x - 1$

10. Simplificar las fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{x^2 - 3x}{x^2 + 3x} =$

b) $\dfrac{x^2 - 3x}{3 - x} =$

c) $\dfrac{x^2 + x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1} =$

d) $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 12} =$

e) $\dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - x - 2} =$

f) $\dfrac{x^3 - 19x - 30}{x^3 - 3x^2 - 10x} =$

11. Suma las fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{1}{x + 1} + \dfrac{2x}{x^2 - 1} - \dfrac{1}{x - 1} =$

12. Resta las fracciones algebraicas:

b) $\dfrac{x + 2}{x^3 - 1} - \dfrac{1}{x - 1} =$

13. Multiplica las fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - 5x + 6} \cdot \dfrac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 4} =$

b) $\dfrac{9 - 6x + x^2}{9 - x^2} \cdot \dfrac{x^2 - 5x + 6}{3x^2 - 9x} =$

14. Divide las fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{x + 2}{x^2 + 4x + 4} : \dfrac{x^2 - 4}{x^3 + 8} =$

b) $\dfrac{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}{x^2 + 2x - 3} : \dfrac{4x - 2x^2}{x^3 - 2x^2 + x} =$

15. Opera:

a) $\left(x + \dfrac{x}{x - 1}\right) \cdot \left(x - \dfrac{x}{x - 1}\right) =$

b) $\left(x + \dfrac{x}{x - 1}\right) : \left(x - \dfrac{x}{x - 1}\right) =$

Soluciones

1. Dados los polinomios:

$P(x) = 4x^2 - 1$ $S(x) = 1/2x^2 + 4$

$Q(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 2$ $T(x) = 3/2x^2 + 5$

$R(x) = 6x^2 + x + 1$ $U(x) = x^2 + 2$

Calcular:

a) $P(x) + Q(x) =$ $= (4x^2 - 1) + (x^3 - 3x^2 + 6x - 2) = x^3 - 3x^2 + 4x^2 + 6x - 2 - 1 =$
$= x^3 + x^2 + 6x - 3$

b) $P(x) - U(x) =$ $= (4x^2 - 1) - (x^2 + 2) = 4x^2 - 1 - x^2 - 2 = 3x^2 - 3$

c) $P(x) + R(x) =$ $= (4x^2 - 1) + (6x^2 + x + 1) = 4x^2 + 6x^2 + x - 1 + 1 = 10x^2 + x$

d) $2P(x) - R(x) =$ $= 2 \cdot (4x^2 - 1) - (6x^2 + x + 1) = 8x^2 - 2 - 6x^2 - x - 1 = 2x^2 - x - 3$

e) $S(x) + T(x) + U(x) =$ $= (1/2\,x^2 + 4) + (3/2\,x^2 + 5) + (x^2 + 2) =$
$= 1/2\,x^2 + 3/2\,x^2 + x^2 + 4 + 5 + 2 = 3x^2 + 11$

f) $S(x) - T(x) + U(x) =$ $= (1/2\,x^2 + 4) - (3/2\,x^2 + 5) + (x^2 + 2) =$
$= 1/2\,x^2 + 4 - 3/2\,x^2 - 5 + x^2 + 2 = 1$

2. Multiplicar:

a) $(x^4 - 2x^2 + 2) \cdot (x^2 - 2x + 3) =$ $= x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 2x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 2x^2 - 4x + 6 =$
$= x^6 - 2x^5 - 2x^4 + 3x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 6x^2 - 4x + 6 =$
$= x^6 - 2x^5 + x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 4x + 6$

b) $(3x^2 - 5x) \cdot (2x^3 + 4x^2 - x + 2) =$ $= 6x^5 + 12x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 10x^4 - 20x^3 + 5x^2 - 10x =$
$= 6x^5 + 12x^4 - 10x^4 - 3x^3 - 20x^3 + 6x^2 + 5x^2 - 10x =$
$= 6x^5 + 2x^4 - 23x^3 + 11x^2 - 10x$

3. Dividir:

a) $(x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20) : (x^2 + 3x - 2)$

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -2x^3 & -11x^2 & +30x & -20 & x^2+3x-2 \\
\cline{6-6}
-x^4 & -3x^3 & +2x^2 & & & x^2-5x+6 \\
\cline{1-3}
 & -5x^3 & -9x^2 & +30x & & \\
 & 5x^3 & +15x^2 & -10x & & \\
\cline{2-4}
 & & 6x^2 & +20x & -20 & \\
 & & -6x^2 & -18x & +12 & \\
\cline{3-5}
 & & & 2x & -8 &
\end{array}
$$

b) $(x^6 + 5x^4 + 3x^2 - 2x) : (x^2 - x + 3)$

$$
\begin{array}{l|l}
x^6 \qquad + 5x^4 \qquad + 3x^2 - 2x & x^2 - x + 3 \\ \hline
\underline{-x^6 + x^5 - 3x^4} & x^4 + x^3 + 3x^2 - 6 \\
\quad x^5 + 2x^4 & \\
\quad \underline{-x^5 + x^4 - 3x^3} & \\
\qquad 3x^4 - 3x^3 + 3x^2 & \\
\qquad \underline{-3x^4 + 3x^3 - 9x^2} & \\
\qquad\qquad - 6x^2 - 2x & \\
\qquad\qquad \underline{6x^2 - 6x + 18} & \\
\qquad\qquad\quad - 8x + 18 &
\end{array}
$$

c) $P(x) = x^5 + 2x^3 - x - 8$ $\qquad Q(x) = x^2 - 2x + 1$

$$
\begin{array}{l|l}
x^5 \qquad + 2x^3 \qquad - x - 8 & x^2 - 2x + 1 \\ \hline
\underline{-x^5 + 2x^4 - x^3} & x^3 + 2x^2 + 5x + 8 \\
\quad 2x^4 + x^3 & \\
\quad \underline{- 2x^4 + 4x^3 - 2x^2} & \\
\qquad 5x^3 - 2x^2 - x & \\
\qquad \underline{-5x^3 + 10x^2 - 5x} & \\
\qquad\quad 8x^2 - 6x - 8 & \\
\qquad\quad \underline{- 8x^2 + 16x - 8} & \\
\qquad\qquad 10x - 16 &
\end{array}
$$

4. Divide por Ruffini:

a) $(x^3 + 2x + 70) : (x + 4)$

	1	0	2	70
-4		-4	16	-72
	1	-4	18	-2

$C(x) = x^2 - 4x + 18 \qquad R(x) = -2$

b) $(x^5 - 32) : (x - 2)$

	1	0	0	0	0	-32
2		2	4	8	16	32
	1	2	4	8	16	0

$C(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16$ $R = 0$

c) $(x^4 - 3x^2 + 2) : (x - 3)$

	1	0	-3	0	2
3		3	9	18	54
	1	3	6	18	56

$C(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + 18$ $R = 56$

5. Indica cuáles de estas divisiones son exactas:

a) $(x^3 - 5x - 1) : (x - 3)$ $P(3) = 3^3 - 5 \cdot 3 - 1 = 27 - 15 - 1 \neq 0$ No es exacta.

b) $(x^6 - 1) : (x + 1)$ $P(-1) = (-1)^6 - 1 = 0$ Exacta

c) $(x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 1) : (x - 1)$ $P(1) = 1^4 - 2 \cdot 1^3 + 1^2 + 1 - 1 = 1 - 2 + 1 + 1 - 1 = 0$
Exacta

d) $(x^{10} - 1024) : (x + 2)$ $P(-2) = (-2)^{10} - 1024 = 1024 - 1024 = 0$ Exacta

6. Encontrar el valor de k para que al dividir $2x^2 - kx + 2$ por $(x - 2)$ dé de resto 4.

$P(2) = 2 \cdot 2^2 - k \cdot 2 + 2 = 4$; $10 - 2k = 4$; $-2k = -6$; $k = 3$

7. Determinar el valor de m para que $3x^2 + mx + 4$ admita $x = 1$ como una de sus raíces.

$P(1) = 3 \cdot 1^2 + m \cdot 1 + 4 = 0$; $3 + m + 4 = 0$; $m = -7$

8. Calcular el valor de a para que el polinomio $x^3 - ax + 8$ tenga la raíz $x = -2$, y calcular las otras raíces.

$P(-2) = (-2)^3 - a \cdot (-2) + 8 = 0$; $-8 + 2a + 8 = 0$; $a = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & 8 \\ -2 & & -2 & 4 & -8 \\ \hline & 1 & -2 & 4 & 0 \end{array}$$

$(x + 2) \cdot (x^2 - 2x + 4)$

$x^2 - 2x + 4 = 0$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2} \notin \mathbb{R}$$

No tiene más raíces reales.

9. Factorizar y calcular las raíces de los polinomios

a) $x^3 + x^2$ $x^3 + x^2 = x^2 (x + 1)$

La raíces son: $x = 0$ y $x = -1$

b) $2x^4 + 4x^2$ $2x^4 + 4x^2 = 2x^2 (x^2 + 2)$

Sólo tiene una raíz $x = 0$; ya que el polinomio, $x^2 + 2$, no tiene ningún valor que lo anule; debido a que la ecuación $x^2 + 2$ no tiene solución

c) $x^2 - 4$ $x^2 - 4 = (x + 2) \cdot (x - 2)$

Las raíces son $x = -2$ y $x = 2$

d) $x^4 - 16$ $x^4 - 16 = (x^2 + 4) \cdot (x^2 - 4) = (x + 2) \cdot (x - 2) \cdot (x^2 + 4)$

Las raíces son $x = -2$ y $x = 2$

e) $9 + 6x + x^2$

$$9 + 6x + x^2 = (3 + x)^2$$ Producto notable

$$\downarrow \qquad \uparrow \qquad \downarrow$$

$$3^2 \quad 2 \cdot 3 \cdot x \quad x^2$$

La raíz es $x = -3$

f) $x^2 - x - 6$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 6}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \dfrac{6}{2} = 3 \\ \searrow x_2 = \dfrac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

Las raíces son $x = 3$ y $x = -2$

g) $2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6$

Tomamos los divisores del término independiente: ±1, ±2, ±3.

Aplicando el teorema del resto sabremos para qué valores la división es exacta.

$P(1) = 2 \cdot 1^4 + 1^3 - 8 \cdot 1^2 - 1 + 6 = 2 + 1 - 8 - 1 + 6 = 0$

Dividimos por Ruffini.

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & 1 & -8 & -1 & 6 \\ 1 & & 2 & 3 & -5 & -6 \\ \hline & 2 & 3 & -5 & -6 & 0 \end{array}$$

$(x - 1) \cdot (2x^3 + 3x^2 - 5x - 6)$

Continuamos realizando las mismas operaciones al segundo factor.

Volvemos a probar por 1 porque el primer factor podría estar elevado al cuadrado.

$P(1) = 2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 - 6 \neq 0$

$P(-1) = 2 \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 - 5 \cdot (-1) - 6 = -2 + 3 + 5 - 6 = 0$

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 3 & -5 & -6 \\ -1 & & -2 & -1 & 6 \\ \hline & 2 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

$(x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (2x^2 + x - 6)$

El tercer factor lo podemos encontrar aplicando la ecuación de 2º grado o tal como venimos haciéndolo, aunque tiene el inconveniente de que sólo podemos encontrar raíces enteras.

El 1 lo descartamos y seguimos probando por -1.

$P(-1) = 2 \cdot (-1)^2 + (-1) - 6 \neq 0$

$P(2) = 2 \cdot 2^2 + 2 - 6 \neq 0$

$P(-2) = 2 \cdot (-2)^2 + (-2) - 6 = 2 \cdot 4 - 2 - 6 = 0$

	2	1	−6
−2		−4	6
	2	−3	0

$(x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (2x - 3)$

Sacamos factor común 2 en último binomio.

$2x - 3 = 2\,(x - 3/2)$

La factorización del polinomio queda:

$2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6 = 2\,(x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (x - 3/2)$

Las raíces son : $x = 1$, $x = -1$, $x = -2$ y $x = 3/2$

h) $2x^3 - 7x^2 + 8x - 3$

$P(1) = 2 \cdot 1^3 - 7 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1 - 3 = 0$

	2	-7	8	-3
1		2	-5	3
	2	-5	3	0

$(x - 1) \cdot (2x^2 - 5x + 3)$

$P(1) = 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 3 = 0$

	2	-5	3
1		2	-3
	2	-3	0

$(x - 1)^2 \cdot (2x - 3) = 2\,(x - 3/2) \cdot (x - 1)^2$

Las raíces son: $x = 3/2$ y $x = 1$

i) $x^3 - x^2 - 4$

$\{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$

$P(1) = 1^3 - 1^2 - 4 \neq 0$

$P(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 - 4 \neq 0$

$P(2) = 2^3 - 2^2 - 4 = 8 - 4 - 4 = 0$

	1	-1	0	-4
2		2	2	4
	1	1	2	0

$(x - 2) \cdot (x^2 + x + 2)$

$x^2 + x + 2 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2} \notin \mathbb{R}$$

$(x - 2) \cdot (x^2 + x + 2)$

Raíz: $x = 2$.

j) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

Posibles raíces: $\{\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12\}$

$P(1) = 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 12 \neq 0$ $P(-1) = (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 - 4 \cdot (-1) - 12 \neq 0$

$P(2) = 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 - 12 = 8 + 12 - 8 - 12 = 0$

	1	3	-4	−12
2		2	10	12
	1	5	6	0

$(x - 2) \cdot (x^2 + 5x + 6)$

$x^2 + 5x + 6 = 0$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{-4}{2} = -2 \\ \searrow x_2 = \frac{-6}{2} = -3 \end{cases}$$

$(x - 2) \cdot (x + 2) \cdot (x + 3)$

Las raíces son : $x = 2$, $x = -2$, $x = -3$.

k) $6x^3 + 7x^2 - 9x + 2$

Posibles raíces: $\{\pm1, \pm2\}$

$P(1) = 6 \cdot 1^3 + 7 \cdot 1^2 - 9 \cdot 1 + 2 \neq 0$

$P(-1) = 6 \cdot (-1)^3 + 7 \cdot (-1)^2 - 9 \cdot (-1) + 2 \neq 0$

$P(2) = 6 \cdot 2^3 + 7 \cdot 2^2 - 9 \cdot 2 + 2 \neq 0$

$P(-2) = 6 \cdot (-2)^3 + 7 \cdot (-2)^2 - 9 \cdot (-2) + 2 = -48 + 28 + 18 + 2 = 0$

	6	7	-9	2
-2		−12	10	−2
	6	−5	1	0

$(x+2) \cdot (6x^2 - 5x + 1)$

$6x^2 - 5x + 1 = 0$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6}}{12} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{12} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{12} = \frac{5 \pm 1}{12} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \\ \searrow x_2 = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$6\cdot(x+2)\cdot(x-1/2)\cdot(x-1/3)$

Raíces: $x=-2$, $x=1/2$ y $x=1/3$

l) $9x^4 - 4x^2 =$ $x^2\cdot(9x^2-4) = x^2\cdot(3x+2)\cdot(3x-2)$

m) $x^5 + 20x^3 + 100x =$ $x\cdot(x^4+20x^2+100) = x\cdot(x^2+10)^2$

n) $2x^3 - 50x =$ $2x\cdot(x^2-25) = 2x\cdot(x+5)\cdot(x-5)$

o) $2x^5 - 32x =$ $2x\cdot(x^4-16) = 2x\cdot(x^2+4)\cdot(x^2-4) = 2x\cdot(x^2+4)\cdot(x+2)\cdot(x-2)$

p) $2x^2 + x - 28$

$2x^2 + x - 28 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot 2\cdot 28}}{4} = \frac{-1\pm\sqrt{1+224}}{4} = \frac{-1\pm\sqrt{225}}{4} = \frac{-1\pm 15}{4} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{14}{4} = \frac{7}{2} \\ \searrow x_2 = \frac{-16}{4} = -4 \end{cases}$$

$2x^2 + x - 28 = 2\,(x+4)\cdot(x-7/2)$

q) $x^2 - 2x + 1 =$ $= (x-1)^2$

r) $x^2 - 6x + 9 =$ $= (x-3)^2$

s) $x^2 - 20x + 100 =$ $= (x-10)^2$

t) $x^2 + 10x + 25 =$ $= (x+5)^2$

u) $x^2 + 14x + 49 =$ $= (x+7)^2$

v) $x^3 - 4x^2 + 4x =$ $= x\cdot(x^2-4x+4) = x\cdot(x-2)^2$

w) $x^2 - 11x + 30$

$x^2 - 11x + 30 = 0$

$$x = \frac{11\pm\sqrt{11^2-4\cdot 30}}{2} = \frac{5\pm\sqrt{121-120}}{2} = \frac{11\pm 1}{2} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{12}{2} = 6 \\ \searrow x_2 = \frac{10}{2} = 5 \end{cases}$$

$x^2 - 11x + 30 = (x-6)\cdot(x-5)$

x) $3x^2 + 10x + 3$

$3x^2 + 10x + 3 = 0$

$$x = \frac{10\pm\sqrt{10^2-4\cdot 3\cdot 3}}{6} = \frac{10\pm\sqrt{100-36}}{6} = \frac{10\pm\sqrt{64}}{6} = \frac{10\pm 8}{6} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{18}{6} = 3 \\ \searrow x_2 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$3x^2 + 10x + 3 = 3\,(x-3)\cdot(x-1/3)$

y) $2x^2 - x - 1$

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{4}{4} = 1 \\ \searrow x_2 = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$2x^2 - x - 1 = 2\,(x - 1) \cdot (x + 1/2)$$

10. Simplificar las fracciones algebraicas:

a) $\frac{x^2 - 3x}{x^2 + 3x} = \frac{x \cdot (x - 3)}{x \cdot (x + 3)} = = \frac{(x - 3)}{(x + 3)}$

b) $\frac{x^2 - 3x}{3 - x} = \frac{x\,(x - 3)}{3 - x} = \frac{-x\,(x - 3)}{-3 + x} = -x$

c) $\frac{x^2 + x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{(x - 1) \cdot (x + 2)}{(x - 1) \cdot (x^2 - 1)} = = \frac{(x + 2)}{(x^2 - 1)}$

d) $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 12} = \frac{(x - 2) \cdot (x - 3)}{(x - 3) \cdot (x - 4)} = = \frac{(x - 2)}{(x - 4)}$

e) $\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - x - 2} = \frac{(x + 1) \cdot (x - 3)}{(x - 2) \cdot (x + 1)} = = \frac{(x - 3)}{(x - 2)}$

f) $\frac{x^3 - 19x - 30}{x^3 - 3x^2 - 10x} = \frac{(x + 2) \cdot (x + 3) \cdot (x - 5)}{x \cdot (x + 2) \cdot (x - 5)} = = \frac{x + 3}{x}$

11. Suma las fracciones algebraicas:

$$\frac{1}{x + 1} + \frac{2x}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} =$$

$$x^2 - 1 = (x + 1) \cdot (x - 1)$$

$$\text{m.c.m.}\left(x + 1,\ x^2 - 1,\ x - 1\right) = (x + 1) \cdot (x - 1)$$

$$= \frac{x - 1 + 2x - (x + 1)}{(x + 1) \cdot (x - 1)} = = \frac{x - 1 + 2x - x - 1}{(x + 1) \cdot (x - 1)} = = \frac{2x - 2}{(x + 1) \cdot (x - 1)} = = \frac{2}{(x + 1)}$$

12. Resta las fracciones algebraicas:

$$\frac{x + 2}{x^3 - 1} - \frac{1}{x - 1} =$$

$$x^3 - 1 = (x-1)\cdot(x^2+x+1)$$

$$\text{m.c.m.}(x^3-1,\ x-1) = (x-1)\cdot(x^2+x+1)$$

$$= \frac{x+2-(x^2+x+1)}{(x-1)\cdot(x^2+x+1)} = = \frac{x+2-x^2-x-1}{(x-1)\cdot(x^2+x+1)} = = \frac{-(x^2-1)}{(x-1)\cdot(x^2+x+1)} =$$

$$= \frac{-(x-1)(x+1)}{(x-1)\cdot(x^2+x+1)} = = \frac{-(x+1)}{x^2+x+1}$$

13. Multiplica las fracciones algebraicas:

a) $$\frac{x^2-2x}{x^2-5x+6}\cdot\frac{x^2+4x+4}{x^2-4} =$$

$$= \frac{(x^2-2x)\cdot(x^2+4x+4)}{(x^2-5x+6)\cdot(x^2-4)} = = \frac{x(x-2)\cdot(x+2)^2}{(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-2)\cdot(x+2)} =$$

$$= \frac{x(x+2)}{(x-2)\cdot(x-3)}$$

b) $$\frac{9-6x+x^2}{9-x^2}\cdot\frac{x^2-5x+6}{3x^2-9x} =$$

$$= \frac{(9-6x+x^2)\cdot(x^2-5x+6)}{(9-x^2)\cdot(3x^2-9x)} = = \frac{(3-x)^2\cdot(x-3)\cdot(x-2)}{(3+x)\cdot(3-x)\cdot 3x(x-3)} =$$

$$= \frac{(3-x)\cdot(x-2)}{3x\cdot(3+x)}$$

14. Divide las fracciones algebraicas:

a) $$\frac{x+2}{x^2+4x+4} : \frac{x^2-4}{x^3+8} =$$

$$= \frac{(x+2)\cdot(x^3+8)}{(x^2+4x+4)\cdot(x^2-4)} = = \frac{(x+2)\cdot(x+2)\cdot(x^2-2x+4)}{(x+2)^2\cdot(x+2)\cdot(x-2)} = = \frac{x^2-2x+4}{x^2-4}$$

b) $$\frac{x^3+3x^2-4x-12}{x^2+2x-3} : \frac{4x-2x^2}{x^3-2x^2+x} =$$

$$= \frac{(x^3+3x^2-4x-12)\cdot(x^3-2x^2+x)}{(x^2+2x-3)\cdot(4x-2x^2)} = = \frac{(x-2)\cdot(x+2)\cdot(x+3)\cdot x\cdot(x-1)^2}{(x+3)\cdot(x-1)\cdot 2x\cdot(2-x)} =$$

$$= \frac{-(x-2)\cdot(x+2)\cdot(x-1)}{2\cdot(-2+x)} = = -\frac{(x+2)\cdot(x-1)}{2}$$

15. Opera:

a) $\left(x+\dfrac{x}{x-1}\right)\cdot\left(x-\dfrac{x}{x-1}\right)=$

$$=x^2-\left(\frac{x}{x-1}\right)^2=x^2-\frac{x^2}{(x-1)^2}==\frac{x^2\cdot(x-1)^2-x^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2\left[(x-1)^2-1\right]}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{x^2\cdot(x-1-1)\cdot(x-1+1)}{(x-1)^2}=\frac{x^2\cdot(x-2)\cdot x}{(x-1)^2}==\frac{x^3\cdot(x-2)}{(x-1)^2}$$

b) $\left(x+\dfrac{x}{x-1}\right):\left(x-\dfrac{x}{x-1}\right)=$

$$=\frac{x\cdot(x-1)+x}{x-1}:\frac{x\cdot(x-1)-x}{x-1}==\frac{x^2-x+x}{x-1}:\frac{x^2-x-x}{x-1}=$$

$$=\frac{x^2}{x-1}:\frac{x^2-2x}{x-1}=\frac{x^2\cdot(x-1)}{x\cdot(x-2)\cdot(x-1)}==\frac{x}{(x-2)}$$