Ejercicios de límites de funciones

1. Calcular los siguientes límites:

1 $\lim_{x\to 1}(-x^2-5x+6)$

2 $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2-2}{x^2-5x+2}$

3 $\lim_{x\to 1}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+x}\right)$

4 $f(x)=\begin{cases}1 & \text{si} & x<-1\\ x^2 & \text{si} & -1\le x<1\\ 2 & \text{si} & x\ge 1\end{cases}$ En los puntos x = -1 y x =1

5 $\lim_{x\to\infty}(3x^4+x^3-2x)$

6 $\lim_{x\to\infty}(-x^2+5x+6)$

7 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{3x^4+x^3-2x}$

2. Calcular los límites cuando x tiende a menos infinito:

1 $\lim_{x\to -\infty}(3x^4+x^3-2x)$

2 $\lim_{x\to -\infty}(-x^2+5x+6)$

3 $\lim_{x\to -\infty}\sqrt{2x^2-8x-3}$

4 $\lim_{x\to -\infty}\sqrt{x^3-5x}$

3. Calcular los siguientes límites:

1 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{2x^5-3x^2}{x^4-x^3}$

2 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{2x^5-3x^2}{x^7-x^3}$

3 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{2x^5-3x^2}{3x^5-x^3}$

4. Hallar los siguientes límites:

1 $\lim_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x-1}$

2 $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}$

3 $\lim\limits_{x \to 0}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$

4 $\lim\limits_{x \to \infty}\dfrac{(x^2+1)^2-3x^2+3}{x^3-5}$

5. Hallar los límites:

1 $\lim\limits_{x \to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{2x}{x^2-4}\right)$

2 $\lim\limits_{x \to \infty}\left(\dfrac{x^2}{x-1}-\dfrac{x^2+1}{x-2}\right)$

3 $\lim\limits_{x \to 3}\left(\dfrac{X-1}{x-3}-\dfrac{x+5}{x^2-4X+3}\right)$

6. Hallar los siguientes límites:

1 $\lim\limits_{x \to -1}\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-1}$

2 $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{(1+x)^2-1}{x}$

3 $\lim\limits_{x \to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-5x+6}$

4 $\lim\limits_{x \to -1}\dfrac{x^2-1}{x^2+2x+1}$

7. Observa la gráfica de esta función f(x) y calcula estos límites.

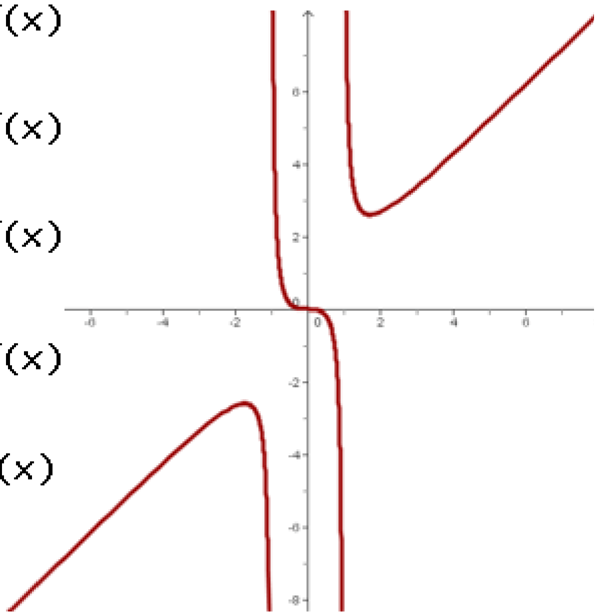
1. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

2. $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$

3. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$

4. $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$

5. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$



8. Estudia, en el intervalo (0, 3), la continuidad de la función:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & si \;\; 0<x<1 \\ 0 & si \;\; 1\le x<2 \\ x-1 & si \;\; 2\le x<3 \end{cases}$$

9. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

1 $$f(x)=\frac{5}{x^4-16}$$

2 $$f(x)=\frac{x-7}{x^3-x^2-11x+3}$$

3 $$f(x)=\begin{cases} x+1 & si \;\; x<2 \\ 2x-1 & si \;\; x\ge 2 \end{cases}$$

4 $$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & si \;\; x\le 0 \\ 2x-3 & si \;\; x>0 \end{cases}$$

Soluciones

1. Calcular los siguientes límites:

1 $\lim_{x\to 1}(-x^2-5x+6)$

$$\lim_{x\to 1}(-x^2-5x+6) = -1^2-5\cdot 1+6 = 0$$

2 $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2}{x^2-5x+2}$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2}{x^2-5x+2} = \frac{3^2-2}{3^2-5\cdot 3+2} = -\frac{7}{4}$$

3 $\lim_{x\to 1}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+x}\right)$

$$\lim_{x\to 1}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+x}\right) = \left(\sqrt{1^2+3\cdot 1}-\sqrt{1^2+1}\right) = 2-\sqrt{2}$$

4 $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad x<-1 \\ x^2 & \text{si} \quad -1\le x<1 \\ 2 & \text{si} \quad x\ge 1 \end{cases}$ En los puntos x = -1 y x =1

En **x = -1**, los **límites laterales** son:

Por la izquierda: $\lim_{x\to -1^-} 1 = 1$

Por la derecha: $\lim_{x\to -1^+} x^2 = 1$

Como en ambos casos coinciden, existe el límite y vale 1.

En **x = 1**, los **límites laterales** son:

Por la izquierda: $\lim_{x\to 1^-} x^2 = 1$

Por la derecha: $\lim_{x\to 1^+} 2 = 2$

Como no coinciden los límites laterales **no tiene límite en x = 1**.

5 $\lim_{x\to \infty}(3x^4+x^3-2x)$

$$\lim_{x\to \infty}(3x^4+x^3-2x) = \infty$$

6 $\lim_{x\to \infty}(-x^2+5x+6)$

$$\lim_{x\to \infty}(-x^2+5x+6) = -\infty$$

7 $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{3x^4+x^3-2x}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{3x^4+x^3-2x}=0$$

2. Calcular los límites cuando x tiende a menos infinito:

1 $\lim_{x\to-\infty}(3x^4+x^3-2x)$

$$\lim_{x\to-\infty}(3x^4+x^3-2x)=\lim_{x\to\infty}(3x^4-x^3+2x)=\infty$$

2 $\lim_{x\to-\infty}(-x^2+5x+6)$

$$\lim_{x\to-\infty}(-x^2+5x+6)=\lim_{x\to\infty}(x^2-5x-6)=\infty$$

3 $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{2x^2-8x-3}$

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^3-5x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{(-x)^3-5(-x)}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{-x^3+5x}$$

No existe el límite, porque el radicando toma valores negativos.

4 $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^3-5x}$

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x^3-5x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{(-x)^3-5(-x)}=\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{-x^3+5x}=-\infty$$

3. Calcular los siguientes límites:

1 $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^5-3x^2}{x^4-x^3}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^5-3x^2}{x^4-x^3}=\infty$$

El numerador tiene mayor grado que el denominador.

2 $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^5-3x^2}{x^7-x^3}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^5-3x^2}{x^7-x^3}=0$$

El denominador tiene mayor grado que el numerador.

3 $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^5-3x^2}{3x^5-x^3}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^5-3x^2}{3x^5-x^3}=\frac{2}{3}$$

Al tener el mismo grado el límite es el cociente entre los coeficientes de mayor grado.

4. Hallar los siguientes límites:

1 $\lim_{x \to 1} \frac{x+1}{x-1}$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{0}$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x+1}{x-1} = \frac{(-)}{(-)} = \infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x+1}{x-1} = \frac{(+)}{(-)} = -\infty$$

Como no coinciden los límites laterales, la función no tiene límite cuando x $\rightarrow$ -1.

2 $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{0}$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{\left(0^-\right)^2} = \infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{\left(0^+\right)^2} = \infty$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

3 $\lim_{x \to 0} \left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$$\lim_{x \to 0} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{0}$$

$$\lim_{x \to 0^-} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{\left(0^-\right)^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{\left(0^+\right)^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\infty$$

4 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(x^2+1)^2-3x^2+3}{x^3-5}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x^2+1)^2-3x^2+3}{x^3-5} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x^2+1)^2-3x^2+3}{x^3-5} = \infty$$

Al elevar el binomio del numerador al cuadrado obtenemos x^4, y por tanto el grado del numerador es mayor que el grado del denominador.

5. Hallar los límites:

1 $\lim\limits_{x\to 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{2x}{x^2-4}\right)$

$$\lim_{x\to 2} \left(\frac{1}{x^2-4} - \frac{2x}{x-2}\right) = \infty - \infty$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{1-2x(x+2)}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{-2x^2-4x+1}{x^2-4} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{-2x^2-4x+1}{x^2-4} = -2$$

2 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2+1}{x-2}\right)$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2+1}{x-2}\right) = \infty - \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-2x^2-x^3-x+x^2+1}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x^2-x-+1}{x^2-3x+2} = -1$$

3 $\lim\limits_{x\to 3} \left(\frac{X-1}{x-3} - \frac{x+5}{x^2-4X+3}\right)$

$$\lim_{x\to 3} \left(\frac{X-1}{x-3} - \frac{x+5}{x^2-4X+3}\right) = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{(x^2-2x+1)-(x+5)}{(x-3)(x-1)} = \lim_{x\to 3} \frac{x^2-3x+2}{(x-3)(x-1)} = \frac{-4}{0}$$

Calculamos los límites laterales

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{x^2-3x+2}{(x-3)(x-1)} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{x^2-3x+2}{(x-3)(x-1)} = \infty$$

No tiene límite

6. Hallar los siguientes límites:

1 $$\lim_{x\to -1} \frac{x^2+2x+1}{x^2-1}$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2+2x+1}{x^2-1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{(x+1)^2}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)}{x-1} = \frac{0}{-2} = 0$$

2 $$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^2-1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^2-1}{x} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+2x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x(x+2)}{x} = \lim_{x\to 0}(x+2) = 2$$

3 $$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2-5x+6}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2-5x+6} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{(x+3)(x-3)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x\to 3} \frac{(x+3)}{(x-2)} = 6$$

4 $$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x^2+2x+1}$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x^2+2x+1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)^2} = \lim_{x\to -1} \frac{x-1}{x+1} = \frac{-2}{0}$$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x-1}{x+1} = \infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x-1}{x+1} = -\infty$$

No tiene límite en x = -1

7. Observa la gráfica de esta función f(x) y calcula estos límites.

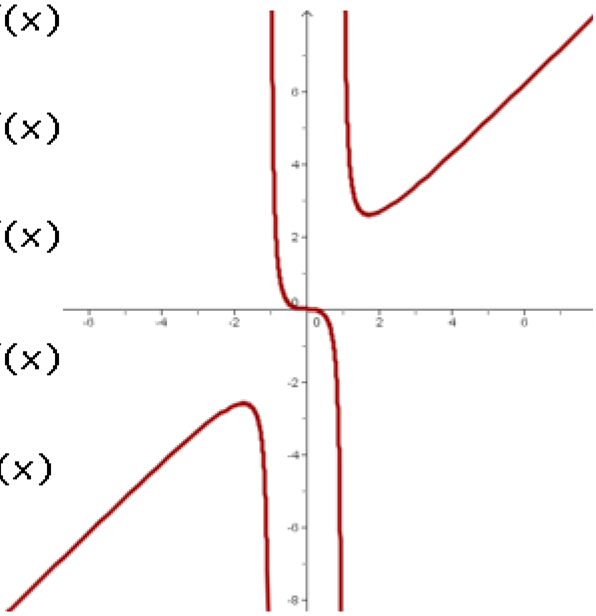
1. $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

2. $\lim_{x \to -1} f(x)$

3. $\lim_{x \to 1^-} f(x)$

4. $\lim_{x \to 1^+} f(x)$

5. $\lim_{x \to \infty} f(x)$



1. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

2. $\lim_{x \to -1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \to -1^+} f(x) = \infty \end{cases}$

3. $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$

4. $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \infty$

5. $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

8. Estudia, en el intervalo (0,3), la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad 0 < x < 1 \\ 0 & si \quad 1 \le x < 2 \\ x - 1 & si \quad 2 \le x < 3 \end{cases}$$

Sólo hay duda de la continuidad de la función en los puntos x = 1 y x = 2, en los que cambia la forma de la función.

$f(1) = 0$

$\lim_{x \to 1^-} x^2 = 1$

$\lim_{x \to 1^+} 0 = 0$

En x = 1 tiene una discontinuidad de salto 1.

$f(2) = 1$

$\lim_{x \to 2^-} 0 = 0$

$\lim_{x \to 2^+} x - 1 = 1$

En x = 2 tiene una discontinuidad de salto 1.

9. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

1 $$f(x)=\frac{5}{x^4-16}$$

La función es continua en todos los puntos de su dominio.

D = R- {-2,2}

La función tiene dos puntos de discontinuidad en x=-2 y x=2.

2 $$f(x)=\frac{x-7}{x^3-x^2-11x+3}$$

La función es continua en toda R menos en los valores que se anula el denominador, si igualamos éste a cero y resolvemos la ecuación obtendremos los puntos de discontinuidad.

$$x^3-x^2-11x+3=0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -11 & 3 \\ -3 & & -3 & 12 & -3 \\ \hline & 1 & -4 & 1 & 0 \end{array}$$

x=-3; y resolviendo la ecuación de 2º grado obtenemos también: x=2-√3 y x=2+√3

La función tiene tres puntos de discontinuidad en x=-3, x=2-√3 y x=2+√3

3 $$f(x)=\begin{cases} x+1 & si\ x<2 \\ 2x-1 & si\ x\geq 2 \end{cases}$$

$$f(2)=3$$

$$\lim_{x\to 2^-}(x+1)=3$$

$$\lim_{x\to 2^+}(2x-1)=3$$

La función es continua en toda $\mathbb{R}$

4 $$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & si\ x\leq 0 \\ 2x-3 & si\ x>0 \end{cases}$$

$$f(0)=-1$$

$$\lim_{x\to 0^-}(x^2-1)=-1$$

$$\lim_{x\to 0^+}(2x-3)=-3$$

La función es discontinua inevitable de salto 2 en x = 0 .